

Etude des réponses harmoniques pour la caractérisation de l'inertie

Essia ZNOUDA¹, Nadia GHRAB-MORCOS¹, Gilles LEFEBVRE²

¹ ENIT. – Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis

ENIT : B. P. 37, Le belvédère, 1002 TUNIS,

essia.znouda@enit.rnu.tn

nadia.ghrab@enit.rnu.tn

² CERTES. – Centre d'Etudes et de Recherche en Thermique Energétique et Systèmes

CERTES-IUT-Université Paris 12 : 61, Avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil,

gilles.lefebvre@univ-paris12.fr

RESUME. Nous proposons dans ce travail de caractériser l'effet de l'inertie thermique des bâtiments par les fonctions de transferts harmoniques. Nous choisissons de nous baser sur le comportement en régime harmonique parce que les principales sollicitations auxquelles sont soumis les bâtiments ont des tendances périodiques. Une analyse en série de Fourier des sollicitations « Température extérieure » et « Flux solaire » montre que les harmoniques les plus influentes sur le comportement des bâtiments en régime harmonique sont celles de période 24h. Nous en déduisons que les fonctions de transferts correspondant à cette période sont suffisantes pour évaluer le niveau d'inertie du bâtiment.

MOTS-CLÉS : inertie thermique, régime harmonique, série de Fourier.

ABSTRACT. In this paper, we propose to analyse the effect of the thermal inertia of the buildings using the harmonic transfer functions. As the most common inputs in the buildings systems are pseudo-periodic, this study is based on the behaviour of building in response to sinusoidal driving forces. The phase lag and the attenuation in amplitude of the response compared to the input, depend on the frequency of the driving force. In order to reduce the number of the required parameters to describe the thermal inertia of the buildings, we used the technique of the Fourier series to identify the most important frequencies of the signals "Outdoor temperature" and "Solar radiation". We found that, for both inputs, the transfer functions corresponding to a period of 24h are sufficient to describe the thermal inertia of the building.

KEYWORDS: thermal inertia, harmonical system, Fourier series.

1. INTRODUCTION

Les principales sollicitations auxquelles est soumis un bâtiment sont la température extérieure et les flux solaires reçus par l'enveloppe. Ces sollicitations ayant des tendances périodiques, nous choisissons de caractériser l'inertie thermique des bâtiments en nous basant sur leur comportement en régime harmonique. La méthode modale permet d'étudier ce comportement par le calcul des fonctions de transferts harmoniques qui peuvent être utilisées pour caractériser l'effet de l'inertie. Comme ces fonctions dépendent de la périodicité des sollicitations, nous nous intéressons dans ce qui suit à l'identification des principales périodes de la température extérieure et des flux solaires.

Un travail analogue à celui-ci a été mené par Ramdani (Ramdani, 1994). Une analyse des sollicitations par la DSP (Densité Spectrale de Puissance) a permis de conclure que la période de 24h est la principale période de la sollicitation « température extérieure ». Pour la sollicitation « flux

solaire », l'étude conclut que les périodes de 24h et de 12h sont toutes les deux importantes. Dans ce qui suit, nous proposons d'utiliser l'analyse en série de Fourier pour étudier ces sollicitations et essayer de vérifier s'il est possible de retenir uniquement la période de 24h pour les deux sollicitations.

2. FONCTION DE TRANSFERT HARMONIQUE

En utilisant la méthode modale (Lefebvre, 1989), la $q^{\text{ème}}$ réponse d'un bâtiment \tilde{y}_q , en régime harmonique établi, à une sollicitation périodique \tilde{U}_p d'amplitude U_p et de pulsation ω s'écrit :

$$\tilde{y}_q(t) = S_{qp} \left[1 - \sum_m r_{qp}(m) \cdot \frac{1 - i \cdot \frac{\lambda_m}{\omega}}{1 + \left(\frac{\lambda_m}{\omega} \right)^2} \right] \cdot \tilde{U}_p(t) \quad [1]$$

telle que :

S_{qp} : élément de la matrice statique S du modèle modal reliant la $q^{\text{ème}}$ réponse à la $p^{\text{ème}}$ sollicitation,

$r_{qp}(m)$: contribution du mode m pour l'établissement de la $q^{\text{ème}}$ réponse à la $p^{\text{ème}}$ sollicitation,

λ_m : valeur propre du mode m .

Le rapport, pour une fréquence ω , entre la réponse q du bâtiment et la sollicitation p est donné par la fonction de transfert harmonique $\Omega_{qp}(\omega)$, qui est normalisée par la réponse statique :

$$\Omega_{qp}(\omega) = 1 - \sum_m r_{qp}(m) \cdot \frac{1 - i \cdot \frac{\lambda_m}{\omega}}{1 + \left(\frac{\lambda_m}{\omega} \right)^2} \quad [2]$$

L'inertie du bâtiment peut être caractérisée par l'analyse de l'amortissement et du déphasage de la réponse par rapport à la sollicitation qui sont respectivement donnés par le module et l'argument de la fonction de transfert harmonique. Le bâtiment est d'autant plus inerte que le déphasage est plus important et que l'amortissement est plus faible.

3. TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE (TFD)

La transformée de Fourier est une technique mathématique qui permet de décomposer une fonction du temps en un spectre de fréquences. La TFD est l'équivalent de la transformée de Fourier pour le traitement des signaux échantillonnés (Lifermann, 1980). Soit S un signal de N échantillons espacés d'un pas de temps ΔT_{ech} , les k composantes $\hat{S}(k)$ de la TFD de S sont données par l'équation [3] :

$$\hat{S}(k) = \sum_{n=1}^N S(n) \cdot e^{-2\pi i f_k \cdot (n-1)} ; k=1, \dots, N \quad [3]$$

telle que la fréquence f_k est donnée par :

$$f_k = \frac{(k-1)}{N \cdot \Delta T_{\text{ech}}} \quad [4]$$

La transformée inverse permet de retrouver le signal initial à partir des composantes $\hat{S}(k)$:

$$S(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{S}(k) \cdot e^{2\pi i f_k \cdot (n-1)} ; n=1, \dots, N \quad [5]$$

Avec la TFD, le signal S est décomposé en une somme de N signaux sinusoïdaux d'amplitude $\|\hat{S}(k)\|$ et de fréquence f_k . Ces signaux jouent des rôles plus ou moins importants pour la reconstitution de S en utilisant la transformée de Fourier inverse [5].

4. ANALYSE DE LA SOLLICITATION « TEMPERATURE EXTERIEURE »

Pour l'analyse de la sollicitation « Température extérieure », on se basera tout d'abord sur l'amplitude des harmoniques, puis sur la qualité du signal reconstitué.

4.1. IDENTIFICATION DES PRINCIPALES HARMONIQUES

La figure 1 présente le spectre fréquentiel du signal « Température extérieure » mesuré sur une année (année 1978) avec un pas de temps (ΔT_{ech}) de 1h. Il s'agit d'une représentation du signal S dans le domaine fréquentiel ($\|\hat{S}(k)\|$ en fonction de k).

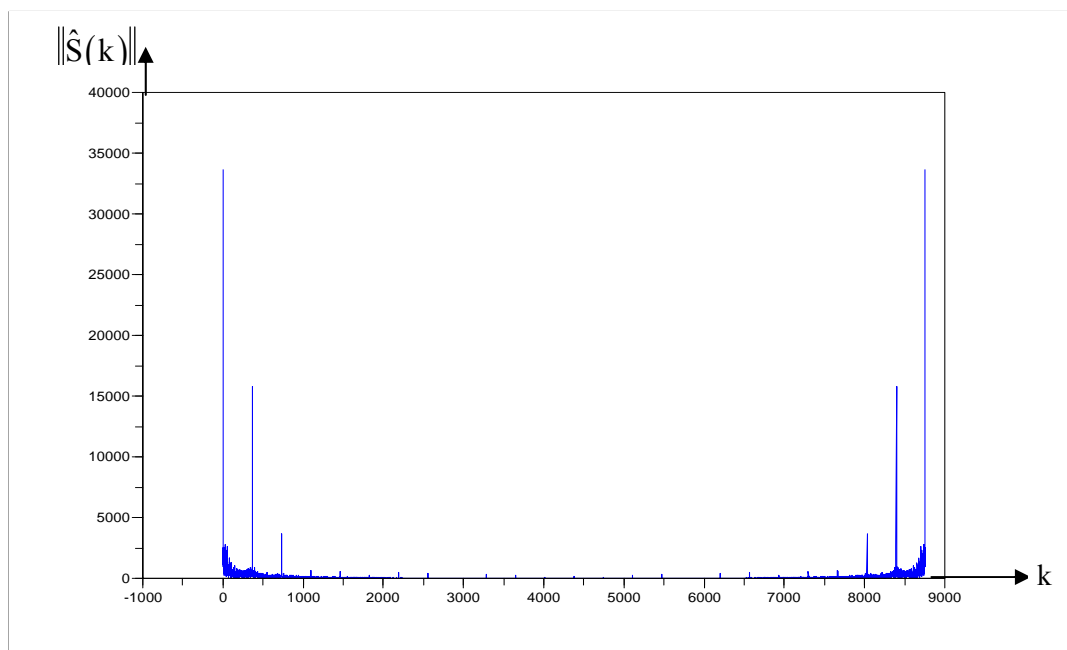


Figure 1 : Spectre fréquentiel du signal « Température extérieure »

On note que ce spectre présente un axe de symétrie autour de $k = \frac{N+2}{2}$. Pour les harmoniques d'indice k compris entre 10^3 et $8 \cdot 10^3$, les raies spectrales ont des hauteurs très faibles ; les harmoniques les plus importantes sont celles correspondant aux plus basses et aux plus hautes fréquences.

En utilisant les données météorologiques des cinq années 1976-1979, on a étudié la sensibilité de l'allure de ce spectre à la durée d'acquisition du signal et au pas d'échantillonnage. On a pu vérifier que les fréquences dominantes dans le domaine des basses fréquences sont indépendantes du pas d'échantillonnage et de la durée d'acquisition du signal. Dans le domaine des hautes fréquences, elles

sont fonction du pas d'échantillonnage. Pour écarter l'effet de ce paramètre, on se limitera dans ce qui suit à l'analyse spectrale dans le domaine des basses fréquences, les harmoniques dominantes dans le domaine des hautes fréquences pouvant toujours être déduites par symétrie.

On présente dans le tableau 1 le signal fondamental et les quatre premières composantes de la transformée de Fourier du signal « Température extérieure » pour chacune des années 1975-1979 (les harmoniques sont classées dans un ordre décroissant de leurs amplitudes).

Tableau 1 : Principales harmoniques du signal « Température extérieure »
pour les 5 années 1975-1979

	Temp_75			Temp_76			Temp_77			Temp_78			Temp_79		
	$\ \hat{S}(k)\ $	k	T_k (h)	$\ \hat{S}(k)\ $	k	T_k (h)	$\ \hat{S}(k)\ $	k	T_k (h)	$\ \hat{S}(k)\ $	k	T_k (h)	$\ \hat{S}(k)\ $	k	T_k (h)
Fond.	154 026	1	∞	151 895	1	∞	160 293	1	∞	154 001	1	∞	158 331	1	∞
1	33 641	2	8760	33 767	2	8784	28 870	2	8760	31 361	2	8760	32 725	2	8760
2	15 777	366	24	14 813	367	24	15 906	366	24	15 157	366	24	15 631	366	24
3	5 854	3	4380	5 092	3	4392	4 051	3	4380	5 802	3	4380	7 712	3	4380
4	3 668	731	12	4 123	26	351	3 969	731	12	3 797	731	12	3 975	731	12

On note que les principales harmoniques de ces cinq signaux correspondent aux mêmes périodes, sauf pour l'année 76 où la période $T=12h$ n'est pas l'une des principales périodes alors que la période $T=351h \approx 14$ jours l'est.

4.2. QUALITE DU SIGNAL RECONSTITUE \tilde{T}_{ext}

Si on ne s'intéresse qu'aux composantes vérifiant $\frac{\|\hat{S}(k)\|}{\|S(k)\|_{max}} \geq 5\%$, on note que les principales

harmoniques sont celles correspondant à $k=2$ et $k=366$ (soit $T_2=1an$ et $T_{366}=24h$). La température de l'année 78, par exemple, est décomposée en un signal fondamental correspondant à la température annuelle moyenne $\bar{T} = \frac{154001}{8760} = 17,6^\circ C$ et en deux harmoniques de périodes respectives 1 an et 24h et d'amplitudes respectives $3,6^\circ C$ et $1,7^\circ C$.

Dans les figures 2 et 3, on compare le signal reconstitué avec le signal fondamental et les deux premières harmoniques ($K^*=3$) au signal initial (T78) respectivement pour les décades 10-20 Janvier et 10-20 Juillet. On note que la périodicité du signal initial est respectée mais la moyenne du signal reconstitué pendant la décade d'hiver (respectivement d'été) est supérieure (respectivement inférieure) à la moyenne du signal initial. Ceci peut être expliqué par la variation de la température moyenne d'une saison à une autre.

L'analyse du signal « température moyenne journalière » (T_{moy}) montre une forte dominance de l'harmonique correspondant à une période $T=1an$. Afin d'éliminer l'effet de la variation saisonnière de « T_{moy} », nous proposons de réduire la température extérieure par rapport à la température moyenne journalière. Pour cela, nous calculons la différence heure par heure entre « T78 » et le signal « H_0+H_1 » reconstitué à partir du signal fondamental et de la première harmonique de « T_{moy} ». L'analyse du signal obtenu, que nous notons « $T-T_{moy}$ », montre une forte dominance de l'harmonique correspondant à une période $T=24h$.

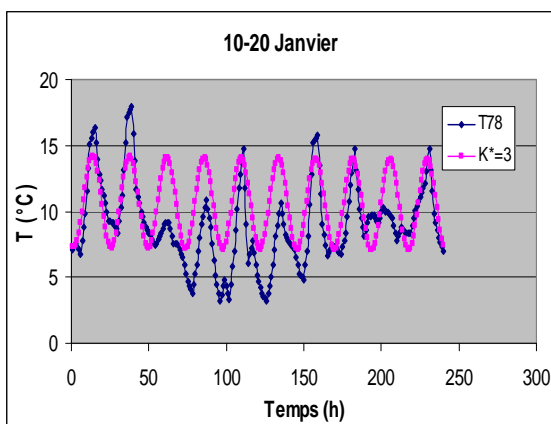


Figure 2 : Comparaison du signal reconstitué au signal initial pour la décade d'hiver (T78)

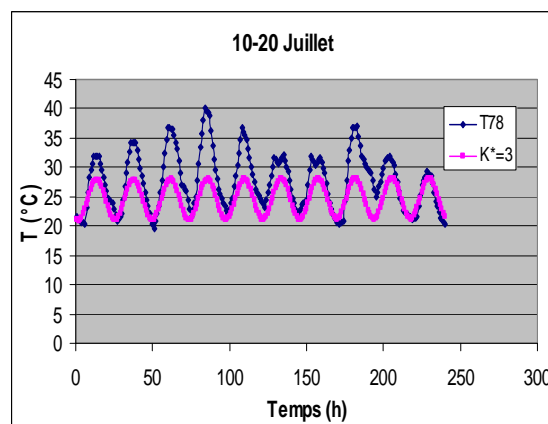


Figure 3 : Comparaison du signal reconstitué au signal initial pour la décade d'été (T78)

Dans les figures 4 et 5, on compare le signal reconstitué avec le signal fondamental et la première harmonique ($K^*=2$), au signal initial respectivement pour la décade d'hiver (10-20 Janvier) et la décade d'été (10-20 Juillet). On note que les deux signaux ont la même allure.

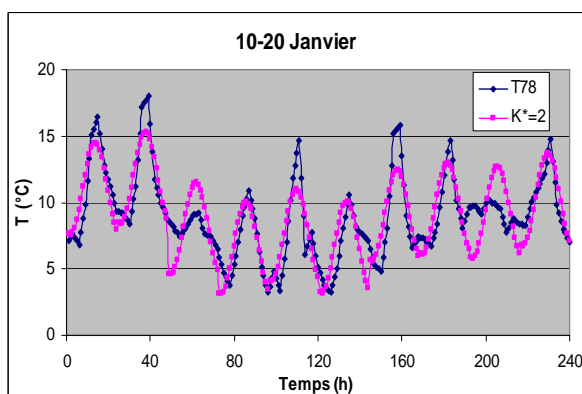


Figure 4 : Comparaison du signal reconstitué au signal initial pour la décade d'hiver après décomposition de $(T-T_{moy})$

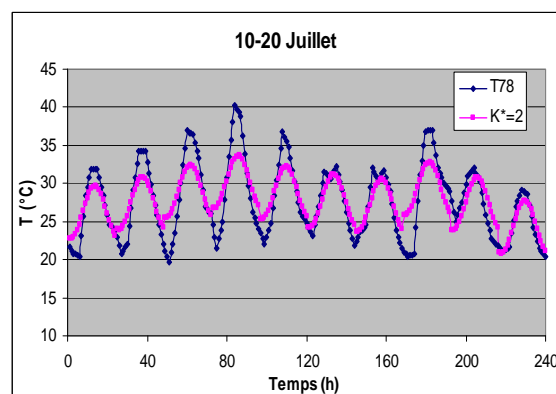


Figure 5 : Comparaison du signal reconstitué au signal initial pour la décade d'été après décomposition de $(T-T_{moy})$

La réduction par rapport à la température moyenne journalière permet de mettre en valeur la principale harmonique de la température extérieure qui correspond à une période de 24h.

En utilisant le logiciel m2m (Lefebvre, 1996), nous déterminons les modèles modaux de deux cellules-test L1 et L2 ayant la même géométrie et qui diffèrent uniquement par les compositions de leurs parois, la toiture et les murs de la deuxième cellule étant isolés et plus lourds. A partir du modèle modal de chaque cellule, le logiciel utilisé permet de déterminer les fonctions de transferts harmoniques entre tous les couples de sollicitations-sorties. Nous nous sommes intéressés à l'évolution de la température intérieure en réponse à une sollicitation en température extérieure sinusoïdale de période 24h. Les modules des fonctions de transferts normalisées des cellules L1 et L2 sont respectivement 0,23 et 0,16. Nous vérifions que la réponse de la cellule à forte inertie est plus amortie que celle de la cellule à faible inertie.

5. IDENTIFICATION DES PRINCIPALES HARMONIQUES DE LA SOLLICITATION « FLUX SOLAIRE »

Dans les données météorologiques que nous utilisons, nous ne disposons que des valeurs horaires du flux solaire global sur un plan horizontal. Les valeurs des flux sur d'autres plans étant calculées à partir des valeurs disponibles, nous nous limitons ici à l'analyse du flux sur un plan horizontal.

5.1. IDENTIFICATION DES PRINCIPALES HARMONIQUES

On présente dans le tableau 3, le signal fondamental et les cinq harmoniques les plus importantes dans le domaine des basses fréquences du signal flux solaire global « Ig » pour chacune des cinq années 1975-1979.

Tableau 3 : Principales harmoniques du signal « Ig » pour chacune des années 1975-1979

	Ig_75			Ig_76			Ig_77			Ig_78			Ig_79		
	$\ \hat{S}(k)\ $	k	T_k (h)	$\ \hat{S}(k)\ $	k	T_k (h)	$\ \hat{S}(k)\ $	k	T_k (h)	$\ \hat{S}(k)\ $	k	T_k (h)	$\ \hat{S}(k)\ $	k	T_k (h)
Fond.	1 877 962	1	∞	1 689 569	1	∞	2 078 230	1	∞	1 723 998	1	∞	1 715 936	1	∞
1	1 471 373	366	24	1 325 433	367	24	1 481 387	366	24	1 344 575	366	24	1 335 247	366	24
2	642 662	731	12	581 949	733	12	489 324	731	12	576 653	731	12	573 905	2	8760
3	522 038	2	8760	428 143	2	8784	328 745	2	8760	483 100	2	8760	495 481	731	12
4	355 746	367	23,9	290 619	368	23,9	277 719	4	2920	331 931	367	23,9	349 281	365	24,1
5	354 216	365	24,1	281 925	366	24,1	262 433	3	4380	324 923	365	24,1	326 945	367	23,9

On note que les trois harmoniques les plus importantes des cinq séries d'échantillons considérées correspondent aux mêmes périodes, à savoir $T=24h$, $T=12h$ et $T=1an$. L'harmonique dominante pour toutes ces séries est celle correspondant à une période de 24h. Les harmoniques correspondant aux périodes de 12 h et de 1 an ont des amplitudes de même ordre de grandeur. L'harmonique de période $T=1an$ est plus importante que celle de période $T=12h$, uniquement pour le signal « Ig_79 ». Pour les autres signaux, l'harmonique correspondant à une période $T=12h$ joue un rôle plus important.

5.2. QUALITE DU SIGNAL RECONSTITUE \tilde{T}_{ext}

Dans les figures 6 et 7 on compare le signal initial (Ig_78) au signal reconstitué ($K^*=4$), à partir du signal fondamental et des trois premières harmoniques, pour une décade de la saison froide et une décade de la saison chaude. Nous notons que pendant la décade d'hiver (figure 6) le signal reconstitué présente des valeurs négatives. Pendant la décade d'été (figure 7), nous notons que les valeurs maximales (respectivement minimales) du signal reconstitué sont plus petites (respectivement grandes) que celles du signal initial.

Les différences notées entre le signal reconstitué et le signal initial peuvent être expliquées par la variation, d'une saison à une autre, du nombre d'heures d'ensoleillement et de l'irradiation globale journalière (H). L'analyse de ce signal montre une forte dominance de l'harmonique correspondant à une période $T=24h$. Afin d'éliminer l'effet de la variation saisonnière de l'irradiation, nous proposons de normaliser par l'irradiation globale journalière (H). Pour cela, nous calculons les valeurs horaires du rapport entre « Ig_78 » et le signal « H_0+H_1 » reconstitué à partir du signal fondamental et de la première harmonique de « H ». L'analyse du signal obtenu ($\frac{Ig}{H}$) montre qu'il y a deux harmoniques

qui sont importantes, ce sont celles correspondant aux périodes $T_{366}=24\text{h}$ et $T_{731}=12\text{h}$. Dans les figures 8 et 9, nous comparons le signal reconstitué à partir du signal fondamental et de ces deux harmoniques ($K^*=3$) au signal initial (I_{g_78}) respectivement pour une décade d'hiver et une décade d'été. Nous notons que les deux signaux ont la même allure.

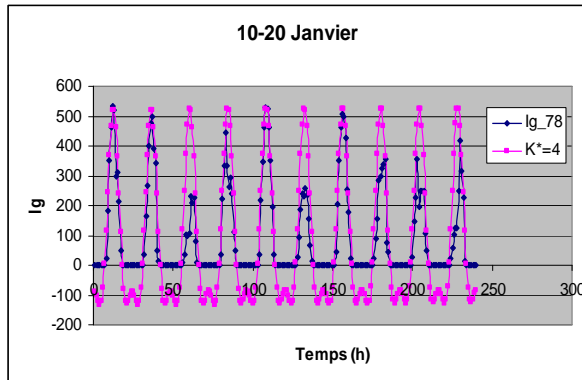


Figure 6 : Comparaison du signal reconstitué au signal initial pour la décade d'hiver (I_{g_78})

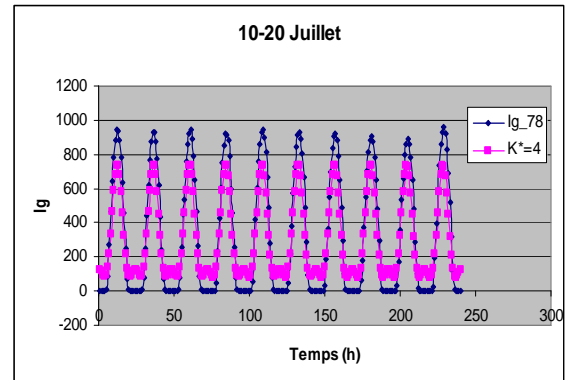


Figure 7 : Comparaison du signal reconstitué au signal initial pour la décade d'été (I_{g_78})

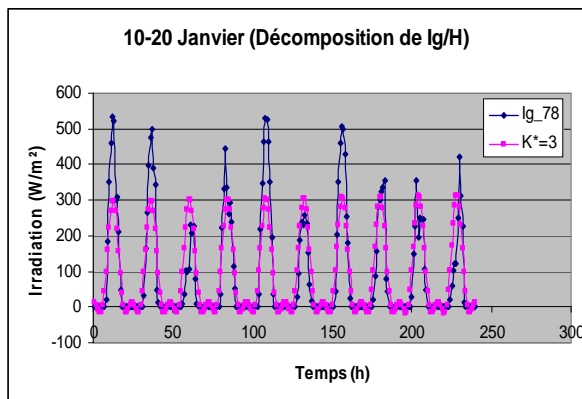


Figure 8 : Comparaison du signal reconstitué au signal initial pour la décade d'hiver ($\frac{I_g}{H}$)

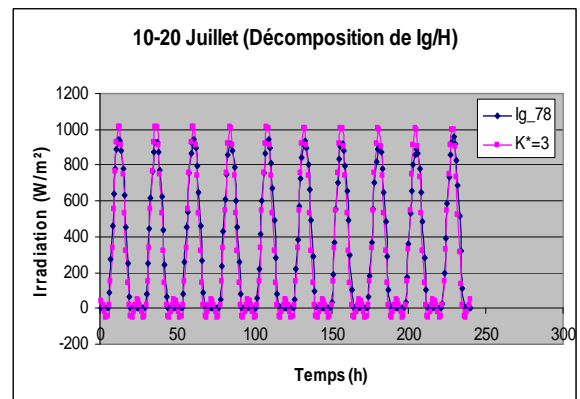


Figure 9 : Comparaison du signal reconstitué au signal initial pour la décade d'été ($\frac{I_g}{H}$)

La normalisation par rapport à l'irradiation globale journalière H permet de vérifier que les harmoniques correspondant aux périodes de 24h et 12h, ajoutées au signal fondamental, permettent de reconstituer le signal I_g correctement.

5.3. QUALITE DE LA REPONSE

Afin de vérifier si on peut correctement représenter le signal « flux solaire » uniquement par sa composante fondamentale et sa première harmonique (24h), nous étudions dans ce qui suit l'effet de l'élimination de la deuxième harmonique (12h) de ce signal sur la réponse du bâtiment. Pour cela on compare la température intérieure du bâtiment T_{int} obtenue en réponse à une sollicitation donnée par le signal initial (I_{g_78}), aux températures \tilde{T}_1 et \tilde{T}_2 obtenues en réponse à des sollicitations données par les signaux reconstitués à partir du signal fondamental et des harmoniques correspondant aux périodes de 24h et 12h, ou du signal fondamental et de la première harmonique uniquement.

Dans les figures 10 et 11 nous comparons les profils des températures \tilde{T}_1 , \tilde{T}_2 et T_{int} de la cellule L1 pendant une décade de la saison d'hiver et une décade de la saison d'été. On note que les courbes

représentant la réponse du bâtiment T_{int} aux deux sollicitations reconstituées (\tilde{T}_1 et \tilde{T}_2) sont quasiment superposées. Elles ont aussi un profil très proche de la courbe représentant la réponse du bâtiment à la sollicitation initiale Ig_78 .

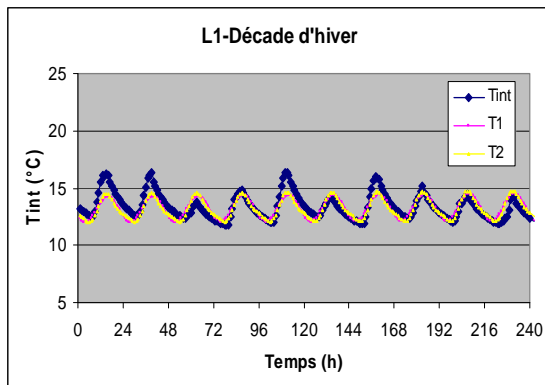


Figure 10 : Comparaison des températures \tilde{T}_1 , \tilde{T}_2 et T_{int} de la cellule L1 pour une décade d'hiver

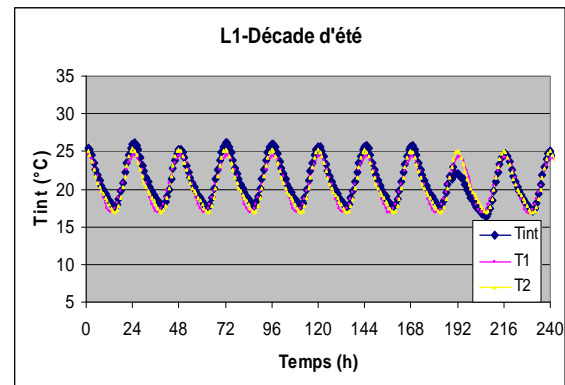


Figure 11 : Comparaison des températures \tilde{T}_1 , \tilde{T}_2 et T_{int} de la cellule L1 pour une décade d'été

Ces figures nous permettent de vérifier que l'effet de la prise en compte de l'harmonique de période 12h a un effet négligeable sur la réponse du bâtiment. Ceci nous permet de conclure que la sollicitation « flux solaire » peut aussi être correctement reconstituée par son signal fondamental et sa première harmonique. L'inertie du bâtiment sera alors caractérisée par la fonction de réponse harmonique correspondant à 24h uniquement. Les modules des fonctions de transferts des cellules L1 et L2 sont respectivement 0,22 et 0,10.

6. CONCLUSION

La méthode modale offre la possibilité de caractériser l'effet de l'inertie par les fonctions de transferts harmoniques. A chaque couple sollicitation-réponse correspond une fonction. Pour des sollicitations réelles qui ne sont pas périodiques, il y aura autant de fonctions de transferts que d'harmoniques importantes dans la décomposition de la sollicitation considérée. Les résultats que nous venons de présenter, montrent que pour les sollicitations température extérieure et flux solaire on peut se limiter à la période de 24h uniquement. Ceci permet de réduire le nombre de paramètres nécessaires pour la caractérisation des effets de l'inertie.

BIBLIOGRAPHIE

- G. Lefebvre, Caractérisation de l'inertie thermique d'un bâtiment par analyse modale. *Revue Générale de Thermique*, 332-333 (1989), 501-512.
- G. Lefebvre, *Environnement logiciel m2m – version 2.17*, Manuel d'utilisateur, Avril 1996.
- J. Lifermann. Les méthodes rapides de transformation du signal : Fourier, Walsh, Hadamard, Haar. Edition MASSON. 1980.
- N. Ramdani, Validation expérimentale et analyse de signaux : Développement d'une méthodologie de comparaison modèle/mesures en thermique du bâtiment, Thèse de doctorat, Université ParisXII-Val de Marne (1994).