

# Modèle modal de simulation du comportement thermique des bâtiments. Confrontation avec TRNSYS

Safa Saidane, Leila Gharbi, Nadia Ghrab-Morcós

Unité de Recherche Energétique des Bâtiments et Systèmes Solaires,  
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, B.P.37, 1002 Tunis-Belvédère, Tunisie.  
[safa\\_saidane2006@yahoo.fr](mailto:safa_saidane2006@yahoo.fr), [leila.gharbi@enit.rnu.tn](mailto:leila.gharbi@enit.rnu.tn), [nadia.ghrab@enit.rnu.tn](mailto:nadia.ghrab@enit.rnu.tn)

---

*RESUME.* Nous avons développé un code de modélisation et de simulation du comportement thermique des bâtiments non conditionnés en régime dynamique. Ce logiciel permet d'évaluer les températures d'air et de surfaces des parois d'un local soumis à des sollicitations météorologiques réelles. Notre choix s'est porté sur la méthode modale associée à une réduction par agrégation linéaire optimisée permettant de simuler le comportement thermique réel d'un bâtiment à l'aide d'un nombre réduit de paramètres, tout en gardant une précision satisfaisante. Cette communication présente le modèle modal que nous avons développé ainsi que la comparaison de ses résultats de simulation avec ceux du logiciel TRNSYS, sur des séquences météorologiques tunisiennes typiques d'été et d'hiver, et pour des cellules à parois multicouches de différentes inerties.

*MOTS-CLÉS :* modélisation thermique des bâtiments, analyse modale, réduction de modèles.

---

*ABSTRACT.* We have developed a calculation code that allows to model and simulate the unconditioned buildings thermal behavior in dynamic regime. This code calculates the air and walls surfaces temperatures of a cell submitted to real weather solicitations. The simultaneous use of the modal method and the reduction technique called optimized linear aggregation allows to simulate the real thermal behaviour of a building with a reduced number of parameters, while keeping a satisfactory precision. This communication presents the developed modal model and a comparison between its simulation results with those of the software TRNSYS, under typical tunisian summer and winter meteorological sequences for different inertia multi-layer cells.

*KEYWORDS :* thermal modelling of buildings, modal analysis, model size reduction.

---

## 1. INTRODUCTION

Dans le but d'étudier de manière réaliste le comportement thermique dynamique des bâtiments tunisiens, nous avons développé un code de calcul permettant d'évaluer les températures d'air et des parois de nos locaux à l'aide d'un nombre réduit de paramètres, tout en gardant une précision satisfaisante (Saidane, 2007).

Après la discrétisation spatiale des différents échanges thermiques modélisés au sein du local, la méthode modale permet de décomposer le champ de températures en une combinaison linéaire de modes propres intrinsèques au bâtiment considéré. Le problème thermique est ainsi réécrit dans sa base modale. Dans une seconde étape, cette représentation modale est associée à une technique de réduction par agrégation linéaire optimisée, qui permet de réduire la taille du modèle aux quelques modes propres dominants qui rendent compte de son comportement en régime variable.

L'application du modèle modal sera illustrée par la simulation d'un local de géométrie simple, soumis à des séquences météorologiques typiques du climat tunisien (Ghrab-Morcós, 1991). Les

résultats en température obtenus seront comparés à ceux issus du logiciel de simulation thermique TRNSYS (TRNSYS group, 1996).

## 2. BILANS THERMIQUES DANS LE BATIMENT

Le modèle physique global du comportement thermique d'un bâtiment en régime dynamique est formulé à partir du principe de conservation de l'énergie pour écrire les équations de bilans thermiques des NPT parois, ainsi que l'équation de bilan convectif de l'air intérieur du local qui a pour expression :

$$\rho_{air} C_{p_{air}} V_{air} \left( \frac{\partial T_{ai}}{\partial t} \right) = \sum_{p=1}^{NPT} h_{cvi,p} S_p (T_{si,p} - T_{ai}) + C_{p_{air}} Q_{m_{air}} (T_{ae} - T_{ai}) + P_{conv} \quad [1]$$

avec  $\rho_{air}$ ,  $C_{p_{air}}$  et  $V_{air}$  respectivement la masse volumique, la chaleur massique et le volume de l'air ;  $Q_{m_{air}}$  et  $P_{conv}$  respectivement le débit massique d'air neuf entrant et la puissance convective dissipée dans le local ;  $T_{ai}$  (resp.  $T_{ae}$ ) est la température de l'air intérieur (resp. extérieur).

$h_{cvi,p}$  (resp.  $h_{cve,p}$ ) le coefficient d'échanges convectifs entre l'air et la surface intérieure (resp. extérieure) d'une paroi p du local de surface  $S_p$  ;  $T_{si,p}$  (resp.  $T_{se,p}$ ) la température de la surface intérieure (resp. extérieure) de la paroi p.

Quant à l'enveloppe, nous distinguons les parois opaques des parois vitrées, dont la capacité de stockage est négligeable et les caractéristiques radiatives variables en fonction de l'angle d'incidence du rayonnement solaire.

Les échanges à l'intérieur d'une paroi opaque sont considérés comme conductifs et monodirectionnels dans le sens de l'épaisseur. Ils sont régis par l'équation de diffusion de la chaleur.

Les bilans thermiques respectifs des surfaces extérieure et intérieure d'une paroi p à un instant t s'écrivent (les indices *i* et *e* se reportent respectivement aux surfaces intérieure et extérieure) :

$$-\lambda_{se,p} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{se,p} + \varphi_{re,p} + h_{cve,p} (T_{se,p} - T_{ae}) = 0 \quad [2]$$

$$-\lambda_{si,p} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{si,p} - \varphi_{ri,p} + h_{cvi,p} (T_{ai} - T_{si,p}) = 0 \quad [3]$$

avec  $\lambda_s$  la conductivité thermique de la couche de surface et  $\varphi_r$  la densité de flux radiatif net sur la surface de la paroi p.

Pour la modélisation des échanges radiatifs surfaciques, nous avons adopté quelques hypothèses simplificatrices couramment utilisées en thermique des bâtiments : air non participant, surfaces à températures uniformes et diffusantes en émission et en réflexion, ainsi que la division du spectre des longueurs d'onde en grandes longueurs d'ondes (GLO) et courtes longueurs d'ondes (CLO).

### 2.1. MODELISATION DES ECHANGES RADIATIFS DES SURFACES EXTERIEURES DES PAROIS

La surface extérieure d'une paroi échange dans le domaine des GLO, selon la loi de Stefan-Boltzman, avec deux sources considérées comme des corps noirs : la voûte céleste et l'environnement.

La densité de flux radiatif net de CLO de la surface extérieure est calculée à partir des rayonnements solaires direct  $\varphi_{Dh}$  et diffus  $\varphi_{dh}$  mesurés sur un plan horizontal :

$$\varphi_{eCLO} = -\alpha_{eCLO} E_e = -\alpha_{eCLO} [R_D \varphi_{Dh} + F_{se-c} \varphi_{dh} + a F_{se-en} (\varphi_{dh} + \varphi_{Dh})] \quad [4]$$

avec  $\alpha_{eCLO}$  le coefficient d'absorption pour les CLO de la surface extérieure de la paroi,  $R_D$  le facteur d'inclinaison du rayonnement direct et  $a$  l'albédo du sol.  $F_{se-en}$  (resp.  $F_{se-c}$ ) est le facteur de forme entre la surface extérieure de la paroi et l'environnement (resp. la voûte céleste).

## 2.2. MODELISATION DES ECHANGES RADIATIFS DES SURFACES INTERIEURES DES PAROIS (GHARBI, 2005)

Pour le calcul des échanges radiatifs GLO intérieurs, nous avons adopté la Méthode des Radiosités tenant compte de toutes les inter-réflexions entre les NPT surfaces supposées grises et diffusantes de l'enceinte. Nous avons utilisé un module précédemment développé pour le calcul rigoureux des facteurs de forme entre les NPT surfaces intérieures du local en fonction de leur géométrie. Le vecteur des densités de flux GLO intérieurs nets s'écrit :

$$\overrightarrow{\varphi_{riGLO}} = [RIGLO] \overrightarrow{T_{si}^4} \quad [5]$$

[RIGLO] est la matrice des échanges radiatifs intérieurs GLO, de dimension (NPTxNPT).

Pour le calcul des échanges radiatifs CLO intérieurs, nous avons adopté une méthode semblable à la Méthode des Radiosités. Cette méthode introduit un facteur d'échange global  $\hat{F}_{ij}$ , égal à la fraction du flux diffusé par la surface  $i$  qui atteint la surface  $j$  après de multiples réflexions.

## 3. DISCRETISATION SPATIALE DES ECHANGES THERMIQUES

La discrétisation spatiale des échanges thermiques sur un maillage de  $N$  nœuds fournit  $N$  équations de bilans thermiques regroupées sous la forme d'une équation matricielle différentielle du premier ordre, appelée aussi équation d'état du système :

$$[C] \frac{d\overline{T}}{dt}(t) = [A] \overline{T}(t) + [D] \overline{U}(t) \quad [6]$$

avec :

- $\overline{T}(t)$  vecteur d'état, de dimension  $N$ .
- $[C]$  matrice diagonale définie positive des capacités calorifiques, de dimension  $(N \times N)$ .
- $[A]$  matrice symétrique définie non positive des échanges thermiques, de dimension  $(N \times N)$ .
- $\overline{U}(t)$  vecteur sollicitations, de dimension  $M$ , réunissant l'ensemble des variables d'entrées.
- $[D]$  matrice d'entrée du modèle, de dimension  $(N \times M)$ .

Notre objectif est de résoudre le système d'équations matriciel [6] c'est-à-dire de déterminer  $\overline{T}(t)$  à chaque pas de temps. Mais concrètement, on peut ne s'intéresser qu'à l'évolution de quelques « mesures » regroupées dans un vecteur  $\overline{Y}(t)$  de dimension  $K$ , écrit sous la forme de l'équation d'observation suivante :

$$\overline{Y}(t) = [E] \overline{T}(t) + [G] \overline{U}(t) \quad [7]$$

avec :

- [E] matrice d'observation, de dimension (KxN).
- [G] matrice de transmission directe, de dimension (KxM).

#### 4. PRINCIPE DE LA METHODE D'ANALYSE MODALE

Cette méthode a notamment été utilisée dans le domaine de la thermique des bâtiments par BACOT (Bacot, 1984), SICARD (Sicard, 1984), NEVEU (Bacot *et al.*, 1984) et LEFEBVRE (Lefèbvre, 1987). La diagonalisation du système algébrique matriciel [6] décrivant les échanges thermiques d'un local permet d'obtenir les éléments propres du système. A chaque couple d'éléments propres, on associe de façon conceptuelle, un paramètre intrinsèque au bâtiment appelé *mode propre*. On définit par la suite, pour chaque mode propre, une *constante de temps* qui précise l'impact temporel des contributions respectives des différents modes sur l'évolution dynamique du bâtiment.

Les systèmes thermiques auxquels s'appliquent le formalisme de l'état modal doivent vérifier trois conditions : la linéarité, l'invariance et la réciprocité.

La réécriture de l'équation d'état [6] par l'analyse modale permet de découpler les N équations différentielles élémentaires et de séparer les variables d'espace et de temps. En effet, l'expression du modèle d'évolution thermique du bâtiment se simplifie nettement en faisant passer le vecteur d'état  $\vec{T}(t)$  de la base physique initiale à la base modale :

$$\vec{T}(t) = [P] \vec{X}(t) \quad [8]$$

avec :

- [P] matrice de passage de la base physique à la base modale, de dimension (NxN). Ses colonnes sont les N vecteurs propres de  $[C]^{-1}[A]$ .

$\vec{X}(t)$  vecteur de dimension N, représentant l'état thermique du bâtiment dans la base modale. Il n'a pas de sens physique particulier.

Le modèle obtenu est appelé *modèle modal*, il est représenté par les équations suivantes :

$$\frac{d\vec{X}}{dt}(t) = [W] \vec{X}(t) + [B] \vec{U}(t) \quad [9]$$

$$\vec{Y}(t) = [H] \vec{X}(t) + [S] \vec{U}(t) \quad [10]$$

avec :

$$[W] = [P]^{-1} [C]^{-1} [A] [P] \text{ et } [B] = [P]^{-1} [C]^{-1} [D]$$

$$[H] = [E] [P] \text{ et } [S] = [G]$$

- [W] matrice diagonale de dimension (NxN), contenant les valeurs propres  $\lambda_n$  de  $[C]^{-1}[A]$ .
- [B] matrice de commande dans la base modale, de dimension (NxM).
- [H] matrice d'observation dans la base modale, de dimension (KxN).
- [S] matrice de transmission directe, de dimension (KxM).

## 5. REDUCTION DU MODELE MODAL PAR AGREGATION LINEAIRE OPTIMISEE (El Biyalli, 1995)

Un autre avantage offert par la méthode d'analyse modale est la possibilité de la coupler à une technique de réduction de modèles. Notre intérêt s'est porté sur la méthode d'agrégation linéaire optimisée qui est une technique mixte de réduction. Le critère de sélection des modes propres à retenir est fonction de la *dominance énergétique* relativement à un signal. La méthode d'agrégation linéaire optimisée étudie l'écart entre l'état du système à un instant  $t$  et son état asymptotique instantané  $|\bar{Y}(t) - \bar{Y}(\infty)|$ , pour des sollicitations du type échelon ou impulsion, dont l'effet est observé sur toutes les sorties du modèle d'une manière globale.

Outre une meilleure signification physique pour le critère de sélection des modes et ses performances prouvées ((Morlot, 1999), (Menezo, 1999), (El Biyalli, 1995)), la méthode d'agrégation linéaire se distingue par une simplicité de la mise en œuvre puisqu'elle consiste à imposer, entre les vecteurs d'état  $\bar{X}(t)$  du modèle modal complet de dimension  $N$  et  $\bar{X}_r(t)$  du modèle modal réduit de dimension  $N_r$ , une relation linéaire de projection définie par :

$$\bar{X}_r(t) = [L]\bar{X}(t) \quad [11]$$

[L] la matrice rectangulaire d'agrégation, de dimension  $(N_r \times N)$ , ne contenant que des 0 et des 1.

L'existence d'une relation d'agrégation est assurée si et seulement si :

$$[W_r][L] = [L][W] \quad [12]$$

$$[B_r] = [L][B] \quad [13]$$

$$\bar{X}_r(0) = [L]\bar{X}(0) \quad [14]$$

L'obtention de l'estimateur réduit du modèle agrégé se fait en deux étapes. Dans la première, on sélectionne les  $N_r$  modes dominants selon le critère « énergétique » permettant de définir [L], et on détermine par la suite les matrices réduites  $[W_r]$  et  $[B_r]$  de l'équation d'état.  $N_r$  est le nombre de modes propres dominants qui apportent 99% de la réponse du bâtiment.

Dans la seconde étape, nous calculons les termes des matrices  $[H_r]$  et  $[S_r]$  de l'équation d'observation (éq. [10]), par la minimisation d'un écart quadratique au niveau de l'observation et la préservation d'un régime permanent identique à celui du modèle complet :

$$[H_r] = ([H][SS]^T [L])([L][SS]^T [L])^{-1} \quad [15]$$

[SS] est issue du calcul du critère  $J_1$  relatif à la norme de Shur<sup>1</sup> de l'écart  $[\Delta Y]$  entre les réponses du système en régime dynamique et en régime permanent glissant, elle est de dimension  $(N \times N)$ .

La matrice de transmission directe  $[S_r]$  s'obtient en écrivant la conservation des régimes statiques entre le modèle complet et le modèle réduit :

$$[S_r] = [S] - \left( ([H] - [H_r][L])[W]^{-1}[B] \right) \quad [16]$$

<sup>1</sup>  $J_1 = \int_0^{\infty} \|\Delta Y\|_{shur}^2 dt = \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \Delta Y^2(k, m) dt = \int_0^{\infty} tr([\Delta Y] \cdot {}^t[\Delta Y]) dt = \int_0^{\infty} tr({}^t[\Delta Y] \cdot [\Delta Y]) dt$

Notre modèle réduit par agrégation linéaire optimisée s'exprime par les équations matricielles suivantes :

$$\frac{d\bar{X}_r}{dt}(t) = [W_r]\bar{X}_r(t) + [B_r]\bar{U}(t) \quad [17]$$

$$\bar{Y}(t) = [H_r]\bar{X}_r(t) + [S_r]\bar{U}(t) \quad [18]$$

$\bar{Y}(t)$  le vecteur de sorties du modèle réduit, ne subit pas de réduction. La performance du modèle modal réduit réside dans le niveau de précision de la relation :  $\bar{Y}(t) \approx \bar{Y}(t)$ .

## 6. VALIDATION DU MODELE MODAL

Le niveau de confort thermique que procure un bâtiment à ses usagers est perceptible notamment à travers la température d'air intérieur. Compte tenu de cela, nous évaluerons les performances de notre modèle modal sur la base de cette température de sortie, et ce par comparaison avec les résultats du logiciel de référence TRNSYS (TRNSYS group, 1996), pour des décades météorologiques tunisiennes typiques (Ghrab-Morcos, 1991).

### 6.1. PRESENTATION DU CAS ETUDIE

Notre validation du modèle modal a été effectuée sur une cellule parallélépipédique de base carrée de 4 m de côté, et de hauteur 3 m, comportant un vitrage de 2 m<sup>2</sup> sur sa façade sud. Le taux de renouvellement d'air est égal à 1 vol/h sur toute la période de simulation.

Nous avons choisi de valider notre modèle modal pour différentes compositions de parois (Saidane, 2007). La description des différentes parois opaques de cette cellule, ainsi que les épaisseurs en centimètres des couches des matériaux de construction qui les constituent, figurent dans le tableau 1.

Tableau 1 : Description et épaisseurs des couches des parois (de l'extérieur vers l'intérieur)

Mur 1		Mur 2		Mur 3		Toiture		Plancher	
Mortier ciment	2.5	Mortier ciment	2.5	Mortier ciment	2.5	Etanchéité	0.5	Hérisson	15
Brique 12 trous	15	Brique 12 trous	15	Briques	6.5	Mortier ciment	2.5	Béton	5
Mortier bâtard	2	Lame d'air	4	plâtrières		Bétons à granulats fins	10	Lit de sable	3
		Briques plâtrières	6.5	Polystyrène	4	Béton	5	Mortier ciment	2
		Mortier bâtard	2	Pierres 30	30	Corps creux de terre cuite	16	Carreaux mosaïques	2
				Mortier bâtard	2	Mortier bâtard	2		

### 6.2. RESULTATS

L'objectif est de valider le modèle construit et d'évaluer la précision de la technique de l'agrégation linéaire optimisée. Nous appliquons le formalisme modal et la réduction modale au bâtiment entier et non pas aux parois une par une. Pour les 3 inerties, la réduction de dimension est très importante, comme le montre le tableau 2.

Tableau 2 : Nomenclature des cellules et rapport de réduction

Inertie	Cellule	Composition	N	N <sub>r</sub>
Faible	Cellule 1	Mur 1 + Toiture+Plancher	117	4
Moyenne	Cellule 2	Mur 2 + Toiture+Plancher	153	3
Forte	Cellule 3	Mur 3 + Toiture+Plancher	157	3

Nous présentons dans les figures 1 à 6 la comparaison des profils de températures d'air intérieur obtenus par notre modèle modal réduit et par TRNSYS, sur les 5 dernières journées des décades météorologiques réelles de janvier et de juillet, et ce pour les 3 inerties étudiées.

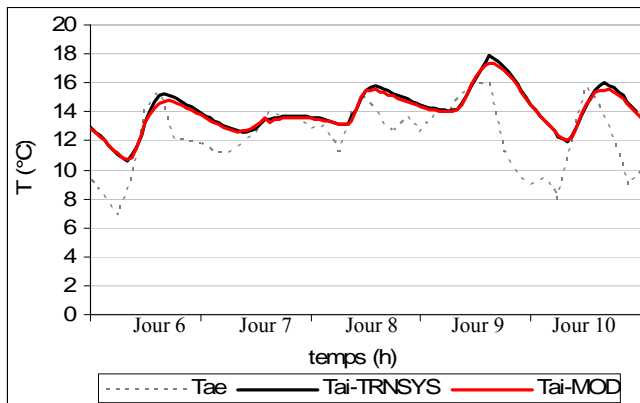


Figure 1 :  $T_{ai}$  de la cellule 1 - janvier

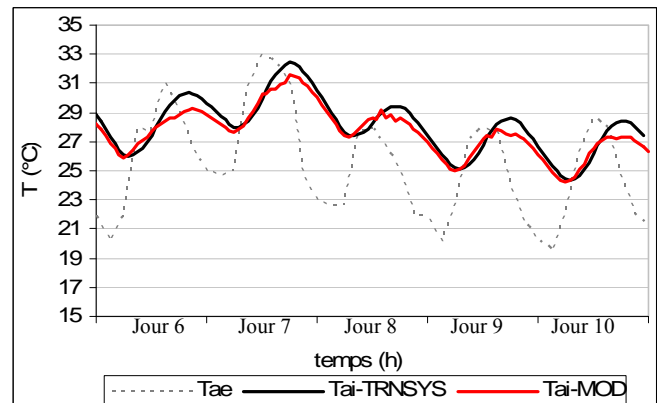


Figure 2 :  $T_{ai}$  de la cellule 1 - juillet

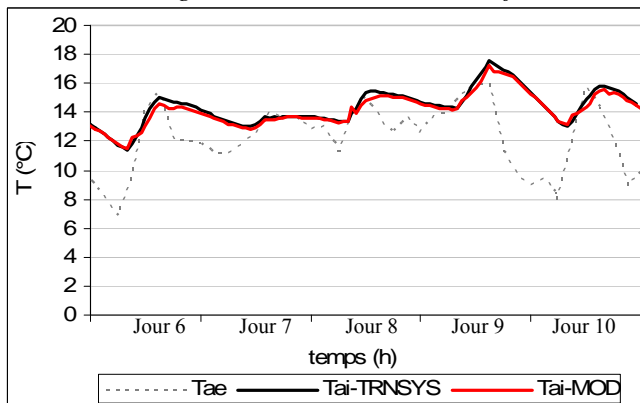


Figure 3 :  $T_{ai}$  de la cellule 2 - janvier

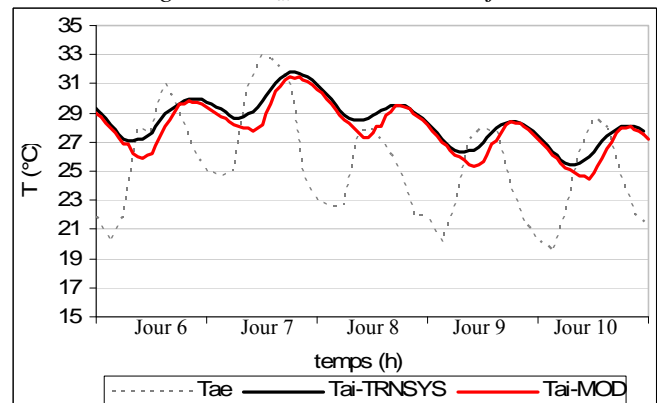


Figure 4 :  $T_{ai}$  de la cellule 2 - juillet

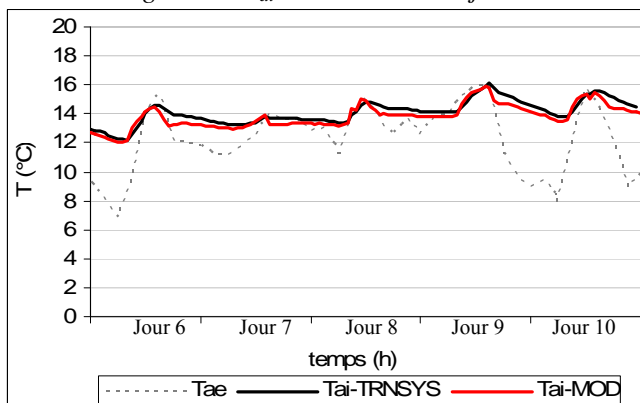


Figure 5 :  $T_{ai}$  de la cellule 3 - janvier

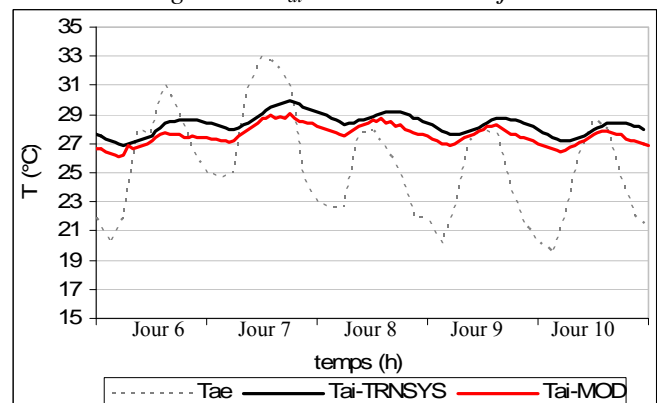


Figure 6 :  $T_{ai}$  de la cellule 3 - juillet

Les profils de températures d'air intérieur obtenus par le modèle modal sont globalement très satisfaisants ; les températures fournies par notre modèle et par TRNSYS sont très proches bien que nos températures sont un peu moins élevées que celles de TRNSYS. Il faut cependant remarquer que ces écarts sont faibles et peuvent être justifiés par une modélisation différente notamment des échanges radiatifs. En effet, le type 56 de TRNSYS que nous avons utilisé, calcule les facteurs de forme de manière simplifiée selon un rapport de surfaces.

## 7. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans sa forme actuelle, notre modèle modal permet de simuler le comportement thermique des bâtiments monozones non conditionnés, ayant une géométrie simple, des parois opaques multicouches et comportant une ou plusieurs surfaces vitrées. Il permet de représenter de manière satisfaisante l'évolution temporelle de la température d'air à l'intérieur d'un local, puisque nos résultats sont assez proches de ceux du logiciel TRNSYS, outil de référence pour la majorité des thermiciens. Les légers écarts constatés peuvent être justifiés par une modélisation différente notamment des échanges radiatifs à l'intérieur du local.

L'aspect modulaire de notre code de calcul nous permettra, par la suite, d'ajouter des modules supplémentaires pour la modélisation de locaux complexes et de le coupler au code de calcul des échanges thermo-aérauliques développé par Gharbi (Gharbi, 2005).

## 8. BIBLIOGRAPHIE

- Bacot P. (1984). *Analyse modale des systèmes thermiques*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI.
- Bacot P., Neveu A., Sicard J. (1984). Analyse modale des phénomènes thermiques en régime variable dans le bâtiment. *Revue Générale de Thermique*, n° 267, p. 189-201.
- El Biyalli A. (1995). *Réduction des systèmes complexes multi-entrées-multi-sorties : Application aux singularités thermiques dans les bâtiments*. Thèse de doctorat d'Etat ès Sciences, Université Abdelmalek Essadi, Faculté des Sciences de Tetouan.
- Gharbi L. (2005). *Modélisation des échanges thermo-aérauliques dans les bâtiments en régime dynamique*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis/Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- Ghrab-Morcous N. (1991). *Analyse et simulation du comportement thermique des structures architecturales vis-à-vis des apports solaires*. Thèse de doctorat d'Etat, Faculté des Sciences de Tunis.
- Lefèbvre G. (1987). *Analyse et réduction modales d'un modèle de comportement thermique de bâtiment*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI.
- Menezo C. (1999). *Contribution à la modélisation du comportement thermique des bâtiments par couplage de modèles réduits*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- Morlot R. (1999). *Contribution au développement de méthodes de réduction de systèmes thermiques complexes : Application aux planchers rayonnants électriques posés sur terre-plein*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- Saidane S. (2007). *Contribution à la modélisation du comportement thermique des bâtiments par analyse et réduction modales*. Mastère en Gestion des Systèmes Industriels, filière Energétique, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis.
- Sicard J. (1984). *Analyse modale appliquée à la thermique : Fondements analytiques et applications au bâtiment*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI.
- TRNSYS group (1996), « *A Transient System Simulation Program TRNSYS* ». Madison, Solar Energy Laboratory, University of Wisconsin, Madison.