

# Commande optimale et analyse de sensibilité par méthode adjointe pour l'identification paramétrique de modèles du bâtiment

Nils Artiges<sup>\*1,2</sup>, Alexandre Nassiopoulos<sup>1</sup>, Franck Vial<sup>2</sup>, Benoit Delinchant<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LUNAM Université, IFSTTAR  
F-44341 Bouguenais, France

<sup>2</sup> CEA Leti  
17 rue des Martyrs, F-38054 Grenoble, France

<sup>3</sup> Univ. Grenoble Alpes, G2Elab  
F-38000 Grenoble, France

\*nils.artiges@cea.fr

---

*RESUME.* Les techniques de contrôle optimal prédictif sont, de par leur formulation, les plus adaptées à une gestion intelligente et efficace des systèmes climatiques de l'habitat. Elles reposent sur l'utilisation d'un modèle numérique du système que l'on cherche à contrôler au travers d'une fonction de coût à minimiser. Leur principale difficulté de mise en œuvre réside dans la nécessité de disposer d'un modèle suffisamment proche de la réalité, et d'avoir des méthodes de calcul efficaces pour une implémentation temps-réel. Nos travaux présentent l'utilisation d'une méthode efficace de calcul de commande optimale basée sur l'utilisation d'un modèle thermique dynamique d'un cas test de deux pièces et d'un modèle adjoint associé. Nous montrons également comment cette approche permet de mener à des études de sensibilité, particulièrement utiles pour spécifier les problèmes d'identification paramétrique et d'instrumentation.

*MOTS-CLÉS.* Commande optimale, Analyse de sensibilité, Instrumentation

---

*ABSTRACT.* Optimal control techniques can actively maximize buildings efficiency by a smarter HVAC (Heating, Ventilation and Air-Conditioning) systems operation. All these techniques involve a model of the controlled system, and an optimization process based on a cost function. The main difficulty with these methods is to find an accurate model of a system with the right data for training and on-line operation. Our work introduces an adjoint based method aimed at efficiently computing an optimal predictive command law, using a descriptive thermal model of a test case. Our approach presents also analysis opportunities (sensitivity analysis of optimal control) to identify most influential inputs and parameters in the final performance. In this paper, we present numerical results concerning a simple two-room test case.

*KEYWORDS.* Optimal control, Sensitivity analysis, Instrumentation

---

## NOMENCLATURE

Paramètres	Unité	Description
$C_z$	$J.K^{-1}$	Capacité thermique de la zone $z$
$S_p$	$m^2$	Aire d'une paroi $p$
$h_{p;z}^0$	$W.m^{-2}.K^{-1}$	Coefficient d'échange convectif entre la zone $z$ et la surface de la paroi adjacente $p$
$c_a$	$J.K^{-1}$	Capacité thermique de l'air
$T_a$	$^{\circ}C$	Température ambiante extérieure
$Q_z$	$W$	Gains internes non contrôlés
$\gamma_z$		Coefficient de gains solaires internes
$\phi$	$W.m^{-2}$	Flux solaire extérieur
$W_z$	$W$	Gains internes dus aux radiateurs
$\mathbb{P}_z$		Indices des parois adjacentes à la zone $z$
$L_p$	$m$	Épaisseur de la paroi $p$
$c_p$	$J.m^{-3}.K^{-1}$	Capacité thermique de la paroi $p$
$k_p$	$J.s^{-1}.m^{-1}.K^{-1}$	Coefficient de conductivité de la paroi $p$
$\alpha_{p;m}$		Coefficient d'échange radiatif entre les parois $p$ et $m$
$\beta_p^L$		Coefficient d'échange radiatif avec la température du ciel
$T^{\infty}$	$^{\circ}C$	Température du ciel
$\varphi_p^L$	$W.m^{-2}$	Flux solaire reçu par la paroi $p$
$\eta_z$		Rendement du radiateur de la zone $z$
$d_z$	$s^{-1}$	Constante de temps du radiateur de la zone $z$

TABLE 1: Paramètres du modèle thermique dynamique

## 1 INTRODUCTION

Les dernières évolutions en informatique embarquée, en protocoles de communication et sur les réseaux de capteurs sans fil ont permis de nettes avancées en domotique, et en particulier dans la gestion thermique des bâtiments, en ouvrant la voie à des techniques de contrôle avancées. La commande prédictive (MPC - Model Predictive Control) est une technique de commande avancée initiée par (Richalet et al., 1978) et généralisée par (Clarke et al., 1987), qui permet un contrôle plus poussé que celui offert par un contrôleur PID standard (Maciejowski, 2002). Généralement, un tel problème de commande peut se formuler comme un problème d'optimisation où l'on vise à minimiser une fonctionnelle de coût dont certaines des variables sont régies par le modèle dynamique choisi. Pour un bâtiment, sa formulation permet de mieux prendre en charge le confort et la consommation énergétique. Dans ce domaine, on retrouve entre autres, le contrôle d'un plancher chauffant à circuit d'eau (Karlsson et Hagentoft, 2011), de systèmes climatiques de bâtiments commerciaux (Henze et al., 2004) ou encore d'une station de métro (Ansuini et al., 2013).

La commande prédictive requiert cependant un modèle du système fiable et des prédictions exactes de ses sollicitations. Ce problème est d'autant plus critique dans le domaine du bâtiment où il est particulièrement difficile d'obtenir des valeurs fiables pour les paramètres thermiques des éléments de construction. Pour remédier à ce problème, on fait alors généralement appel à des méthodes d'identification paramétriques, qui peuvent par ailleurs être relativement difficiles à mettre en œuvre lorsque le modèle à identifier devient complexe.

Pour simplifier le procédé d'identification, on peut le restreindre aux paramètres ayant le plus d'influence d'un point de vue thermique ou énergétique. Dans ce but, des analyses de sensibilité

peuvent être mises en œuvre sur des modèles thermiques dynamiques du bâtiment. (Spitz et al., 2011) et (Aude et al., 2000) présentent des études de sensibilité sur des besoins énergétiques et températures. Le lecteur pourra également se référer à (Merheb, 2013) pour les études de sensibilités et d'incertitudes dans le bâtiment. Dans notre cas, il nous est apparu important d'appliquer les études de sensibilité directement au problème de contrôle, afin de savoir quels paramètres sont susceptibles d'avoir le plus d'influence sur la performance de la loi de commande calculée. Par ailleurs, le temps de calcul peut vite devenir critique du fait du nombre important de paramètres et des méthodes efficaces de calcul doivent être envisagées.

Dans cet article, nous présentons tout d'abord notre cas test ainsi que son modèle mathématique. Nous exposons ensuite une méthode de commande prédictive basée sur l'algorithme du gradient conjugué avec l'utilisation d'un modèle adjoint de notre système pour un calcul efficace du gradient, en exploitant principalement la théorie du contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles (Lions, 1971). Nous montrons enfin comment cette méthode peut facilement s'étendre au calcul de sensibilités locales pour identifier les paramètres influant le plus sur la commande et ainsi orienter les choix pour les étapes d'identification du modèle (et *in fine* d'instrumentation du bâtiment).

## 2 CAS TEST DEUX PIÈCES

### 2.1 DESCRIPTION

Notre cas test consiste en un bâtiment simple constitué de deux pièces identiques (fig.1), déjà utilisé dans une précédente étude de notre équipe (Brouns et al., 2013). Nous utilisons son modèle numérique autant en simulation que pour les calculs de commande. Chaque pièce est équipée d'un radiateur, d'une aération simple avec l'extérieur et d'une fenêtre. Chaque radiateur est électrique, d'une puissance réglable entre 0 et 3 kW.

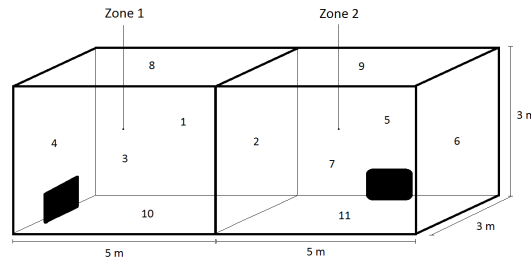


FIGURE 1. Cas d'étude et numérotation des parois

### 2.2 MODÈLE PHYSIQUE

Nous utilisons ici une modélisation thermique-dynamique multizone basé sur l'application de l'équation de la chaleur sur des zones thermiques de température et pression uniformes et des parois homogènes à conduction thermique uni-directionnelle. Pour plus de simplicité, nous négligeons ici les échanges radiatifs entre les faces internes des parois et l'environnement extérieur via les fenêtres.

La température  $T_z$  en  $^{\circ}C$  de chaque zone  $z \in \{1; 2\}$  est régie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} C_z \frac{dT_z}{dt} = \sum_{p \in \mathbb{P}_z} S_p h_{p;z}^0 (\theta_p^s(t) - T_z) \\ \quad + c_a q_z (T_a - T_z) + Q_z + W_z + \gamma_z \phi \\ T_z(t=0) = T_z^0 \end{cases} \quad (1)$$

Où  $\theta_p^s$  sont les températures des surfaces adjacentes. Ces équations sont couplées avec celles décrivant la dynamique de la température des parois  $\theta_p(x, t)$  et leurs conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_p c_p \frac{\partial \theta_p}{\partial t} - S_p \frac{\partial}{\partial x} \left( k_p \frac{\partial \theta_p}{\partial x} \right) = 0 \\ -k_p S_p \frac{\partial \theta_p}{\partial x}(0; t) = \sum_{m \in \mathbb{P}_z} S_p \alpha_{p;m} (\theta_m(0; t) - \theta_p(0; t)) \\ \quad + S_p h_{p;z}^0 (T_z - \theta_p(0; t)) \\ k_p S_p \frac{\partial \theta_p}{\partial x}(L_p; t) = S_p h_p^L (T_a - \theta_p(L_p; t)) \\ \quad + S_p \beta_p^L (T^\infty - \theta_p(L_p; t)) + S_p \varphi_p^L \\ \theta_p(x, t = 0) = \theta_p^0(x) \end{array} \right. \quad (2)$$

Dans le système d'équations (2),  $(x = 0)$  correspond à l'abscisse de la face interne de la paroi et  $(x = L_p)$  à l'abscisse de la face extérieure. Il est valide pour toutes les parois excepté les numéros 2, 10 et 11 pour lesquelles les conditions aux limites sont différentes et peuvent être facilement adaptées.

Chaque chauffage est modélisé par une équation différentielle du premier ordre, avec un coefficient de rendement  $\eta_z$  et une constante de temps  $d_z$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_z \frac{dW_z}{dt} + W_z = \eta_z P_z \\ W_z(t = 0) = W_z^0 \end{array} \right. \quad (3)$$

L'équation (3) modélise de manière très simplifiée la dynamique entre la puissance électrique  $P_z$  et l'énergie thermique  $W_z$  en watts délivrée au sein de la zone  $z$  (échanges radiatifs négligés).

### 3 CONTRÔLE COMMANDE PRÉDICTIF

Dans cette section, nous présentons une méthode permettant de calculer de manière efficace une loi de commande optimale pour les radiateurs de notre cas test. Soit  $u = \{P_1, P_2\} \in U = (\mathbb{L}^2([0, t_a]))^2$  notre vecteur de contrôle,  $[0, t_a]$  étant l'intervalle de temps sur lequel on cherche à calculer notre loi de commande. En premier lieu nous supposons connus toutes les conditions initiales ( $T_z^0$ ,  $\theta_p^0$  et  $W_z^0$ ) ainsi que tous les paramètres statiques ( $C_z$ ,  $c_p$ ,  $k_p$ ,  $h_p$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $h$ ). Nous disposons également de prédictions pour  $(Q_z(t), q_z(t))$ ,  $(T_a(t), T^\infty(t))$ ,  $\varphi_p^L(t)$  et  $T_s(t)$  pour  $t \in [0, t_a]$  supposées idéales sur l'intervalle de temps  $t \in [0, t_a]$  (entre autres grâce à des prédictions météorologiques et des scénarios d'occupation). Ainsi, nous sommes capables de calculer la réponse du système  $\{T_z, \theta_p, W_z\}$  sur  $[0, t_a]$  pour n'importe quel vecteur de contrôle  $u$ . Nous pouvons alors formuler le problème de contrôle de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \inf_{u \in U} J(u) \\ J = \frac{1}{2} \sum_{z=1}^{N_z} \int_0^{t_a} a_z(t) P_z^2 dt \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{z=1}^{N_z} \int_0^{t_a} b_z(t) (T_{opz}(u) - T_{opz}^c)^2 dt \end{array} \right. \quad (4)$$

$T_{opz} = \frac{T_{mrz} + T_z}{2}$  est ici une version simplifiée de la température opérative, où  $T_{mrz} = \overline{\theta_{p;z}^s}$  est la moyenne des températures adjacentes à la zone  $z$ . De manière générale, la température opérative est considérée comme plus proche de la température effectivement ressentie par les occupants que la température de zone (Nilsson, 2004).

$J(u)$  est une fonction de coût quadratique portant sur la consommation énergétique et l'écart de la température opérative de zone à une température de consigne  $T_{opz}^c$ . Les coefficients  $a_z$  et  $b_z$  permettent de gérer à chaque instant le compromis entre le confort et la consommation électrique. En particulier, ces coefficients peuvent être calculés en fonction des exigences de confort

et de la variation prévisionnelle du coût de l'énergie.

Pour résoudre le problème d'optimisation (4), nous appliquons la méthode du gradient conjugué en calculant les gradients par la méthode de l'adjoint. Cette méthode, détaillée dans un cas plus général dans (Lions, 1971), se base sur une formulation explicite des gradients à partir des résultats de simulation d'un modèle linéarisé de notre cas test, dit "direct", et d'un modèle dit "adjoint" obtenu à partir du modèle direct. De fait, elle permet de calculer un gradient de grande dimension de manière très efficace (coût numérique de deux simulations).

### 3.1 CALCUL DU GRADIENT

Une manière classique de résoudre le problème d'optimisation (4) est de passer par l'écriture du Lagrangien associé au problème en considérant les équations (1), (2) et (3) comme des contraintes associées à des multiplicateurs de Lagrange respectifs  $V_z$ ,  $A_p$  et  $B_z$  (Allaire, 2007). Nous avons alors :

$$\mathcal{L} = \sum_{z,p} \mathcal{L}(u, T_z(u), \theta_p(u), W_z(u), V_z, A_p, B_z) \quad (5)$$

Ainsi, résoudre (4) revient à trouver le point selle de  $\mathcal{L}$  avec  $u$  et les multiplicateurs de Lagrange comme seules variables (et qui vérifie par définition  $\nabla \mathcal{L} = 0$ ).

Soit  $\delta u = \{\delta P_1, \delta P_2\} \in U$ , une petite perturbation de  $u$ . Nous avons alors  $\delta \theta_p$ ,  $\delta T_z$  et  $\delta W_z$ , solutions d'un modèle de sensibilité. On peut montrer qu'il existe un modèle dit adjoint de ce modèle de sensibilité tel que si les multiplicateurs de Lagrange  $V_z$ ,  $A_p$  et  $B_z$  en sont les variables d'état (appelés états adjoints respectifs de  $T_z$ ,  $\theta_p$  and  $W_z$ ), on obtient alors localement une expression explicite du gradient :

$$\langle \nabla J(u); \delta P_z \rangle_U = \int_0^{t_a} [\eta_z B_z + a_z P_z] \delta P_z dt \quad (6)$$

Le modèle adjoint présente la même structure que le modèle direct, mais possède des conditions finales au lieu de conditions initiales.

$\nabla J$  peut alors être calculé simplement en résolvant successivement le modèle direct linéarisé et son modèle adjoint. Notons que la puissance délivrable par les radiateurs étant bornée, le problème que l'on doit résoudre est en réalité un problème d'optimisation sous contraintes. Pour le résoudre, avons fait appel à la méthode d'Uzawa (Ciarlet, 1989) qui nous ramène à résoudre une succession de problèmes sans contraintes.

### 3.2 PREMIERS RÉSULTATS DE CONTRÔLE

Nous mettons ici en œuvre la méthode précédemment décrite sur une période de 4 jours. Nous appliquons une température de consigne  $T_{op}^c$  sur les deux pièces entre 8 heures et 18 heures (ce qui implique  $a_z(t) = 0$  aux autres instants). Nous appliquons également un scénario météorologique issu d'un fichier météo EnergyPlus (en négligeant les gains solaires internes  $\gamma_z \phi$  pour une meilleure analyse des résultats), et imposant des gains internes  $Q$  dans la pièce 2 de 2,5 kW de 9 h à 12 h afin de modéliser une activité humaine. Les résultats de ce premier calcul sont présentés figure 2.

Cette technique offre de nets avantages par rapport à une régulation classique. On peut ici clairement voir l'anticipation par  $P_2$  des gains internes  $Q$  dans la pièce 2, mais elle génère des oscillations sur  $T_{op2}$  (non présentes pour la zone 1). Un travail sur la formulation de la fonctionnelle de coût permettrait d'en améliorer les performances, en particulier en pénalisant ces oscillations de Gibbs (dues à la recherche de solutions dans l'espace  $L^2$ ) et les effets de bords aux instants finaux et initiaux.

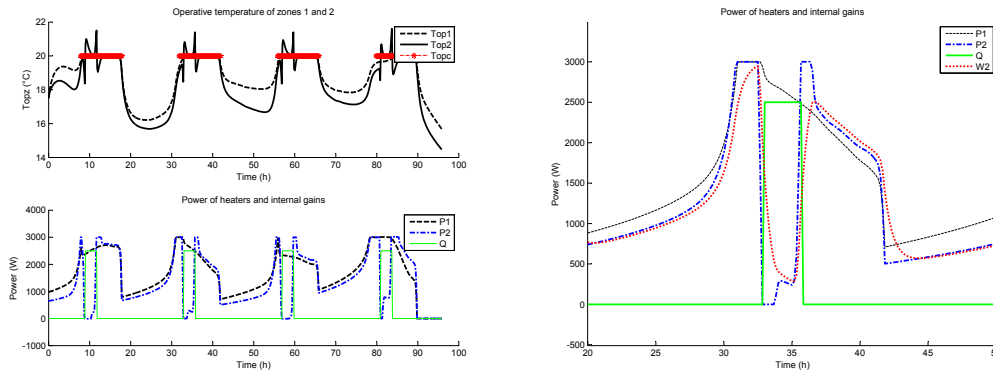


FIGURE 2. Commande optimale et réponse en température

## 4 INSTRUMENTATION POUR UN CONTRÔLE OPTIMAL

### 4.1 PROCÉDÉ DE COMMANDE

Le calcul d'une loi de commande de ce type nécessite d'avoir à disposition les données les plus exactes possible. En particulier, il est nécessaire d'avoir une bonne estimation de l'état thermique présent et des sollicitations à venir, ainsi que de l'ensemble des paramètres du modèle. Pour palier aux variations régulières de ces valeurs, il est essentiel de les estimer fréquemment et de recalculer régulièrement la commande à appliquer (qui n'est d'ailleurs valable que pour un intervalle de temps donné).

Un procédé de commande complet peut ainsi être vu de la manière suivante :

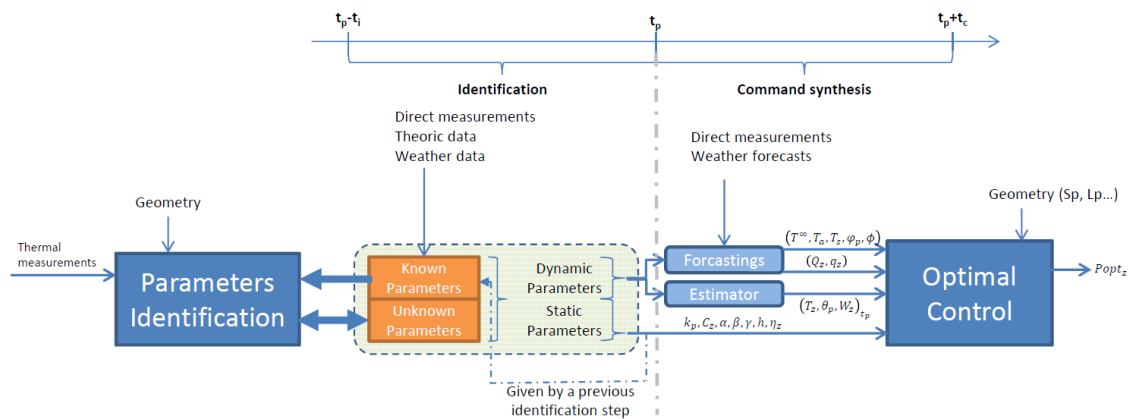


FIGURE 3. Procédé d'identification et de contrôle

Il s'agit ici de mettre en œuvre une étape d'identification paramétrique et de prédiction avant chaque calcul de commande. L'identification paramétrique consiste à appliquer un algorithme d'optimisation permettant d'estimer la valeur des paramètres inconnus de manière à réduire l'écart quadratique entre la réponse du modèle et un ensemble de mesures réalisées *in situ* (Nassiopoulos et Bourquin, 2010).

Le choix des mesures à réaliser est essentiel pour une bonne estimation des paramètres, ce qui est indispensable à un bon calcul de la commande. Ce choix dépend inévitablement des paramètres que l'on souhaite identifier. En effet, tous les paramètres n'ont pas la même influence

sur la réponse du système et sur la loi de commande générée. Pour construire une instrumentation parcimonieuse et adaptée, il convient en premier lieu de repérer les paramètres ayant le plus d'influence sur la loi de commande optimale afin de réduire au maximum le nombre de paramètres à identifier, et par conséquent l'instrumentation nécessaire. Un premier moyen de réaliser cette sélection est de faire appel à des méthodes d'analyse de sensibilité.

## 4.2 ANALYSES DE SENSIBILITÉ

De la même manière que nous avons calculé le gradient la fonctionnelle  $J$  du problème de contrôle par rapport au vecteur  $u$ , nous pouvons facilement le calculer par rapport à n'importe quel ensemble de paramètres  $p$  en réécrivant seulement le modèle de sensibilité et le modèle adjoint associé. Une fois calculée la loi de commande optimale  $u^*$ , on peut montrer de la même manière qu'il est aisé de calculer efficacement  $\nabla_p J_{min} = \nabla_p J(p, u^*(p))$ , le gradient du minimum de notre indicateur de performance (voir équation (4)) pour chaque paramètre  $p$ . Ce gradient peut ensuite permettre de calculer des indices de sensibilité relatives :  $S_p = \frac{1}{J_{min}} |\langle \nabla_p J_{min}, p \rangle|$ .

La figure 4 représente le résultat du calcul de ces indices sur sur notre cas test pour l'ensemble des paramètres exceptés ceux liés à la géométrie (surfaces, longueurs et coefficients d'échanges radiatifs). Ces résultats suggèrent que les températures initiales, les coefficients de rendement des radiateurs et les coefficients de conductivité des parois extérieures sont ici les plus importants. Une étude sur un temps de contrôle plus long permettrait de diminuer la sensibilité aux températures initiales, mais les paramètres et entrées du modèle évoluant avec le temps, la commande ne doit pas être calculée sur un trop grand intervalle.

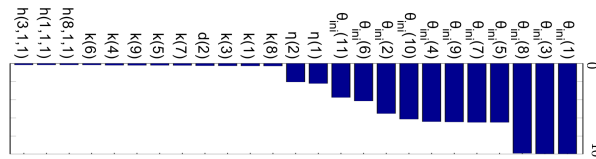


FIGURE 4. Indices de sensibilité

Si ces indices permettent dans une certaine mesure de classer l'importance des paramètres au vu de la commande optimale, il reste nécessaire de faire preuve de discernement dans l'analyse des résultats. Par exemple si  $p$  est nul,  $S_p$  sera nul également alors que  $p$  peut avoir une influence non négligeable. De plus, les sensibilités calculées ici sont des sensibilités locales. Il pourrait être judicieux de faire appel à l'analyse de sensibilité globale pour obtenir des résultats plus généraux sur un bâtiment donné. La technique DGSM (Sobol et Kucherenko, 2009; Kucherenko et al., 2009) par exemple, pourrait permettre d'accéder facilement à de tels indices par l'utilisation de dérivées locales réparties en différents points de l'espace des paramètres.

## 5 CONCLUSION

Dans ces travaux, nous présentons une mise en œuvre de la méthode adjointe pour le calcul de lois de commande optimale sur le cas test simplifié d'un bâtiment de deux pièces. L'intérêt principal de cette méthode réside dans son efficacité en terme de calculs numériques et sa facilité d'extension à des méthodes d'analyse de sensibilité portant sur le contrôle optimal.

Cependant, le calcul de commande et son analyse de sensibilité ne suffit pas à la spécification d'un système de capteurs adapté au procédé de commande dans sa globalité. Une analyse plus générale sur la propagation d'erreurs de l'étape d'identification jusqu'à la commande du système permettrait par exemple de sélectionner les capteurs les plus importants au sein d'un système

d'instrumentation supposé "maximal" (ie. comportant le plus grand nombre et la plus grande diversité de capteurs dans la limite de la réalisabilité).

## RÉFÉRENCES

- Allaire, G. (2007). *Numerical Analysis and Optimization : An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation*. OUP Oxford.
- Ansuini, R., Vaccarini, M., Giretti, A., et Ruffini, S. (2013). Models for the real-time control of subway stations. In *Proceedings of BS 2013 : 13th Conference of the International Building Performance Simulation Association*, pages 1794–1801.
- Aude, P., Tabary, L., et Depecker, P. (2000). Sensitivity analysis and validation of buildings' thermal models using adjoint-code method. *Energy and Buildings*, 31(3) :267–283.
- Brouns, J., Nassiopoulos, A., Bourquin, F., et Limam, K. (2013). State-parameter identification problems for accurate building energy audits.
- Ciarlet, P. G. (1989). *Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimisation*. Cambridge University Press.
- Clarke, D. W., Mohtadi, C., et Tuffs, P. S. (1987). Generalized predictive control—Part i. the basic algorithm. *Automatica*, 23(2) :137–148.
- Henze, G. P., Felsmann, C., et Knabe, G. (2004). Evaluation of optimal control for active and passive building thermal storage. *International Journal of Thermal Sciences*, 43(2) :173–183.
- Karlsson, H. et Hagentoft, C.-E. (2011). Application of model based predictive control for water-based floor heating in low energy residential buildings. *Building and Environment*, 46(3) :556–569.
- Kucherenko, S., Rodriguez-Fernandez, M., Pantelides, C., et Shah, N. (2009). Monte carlo evaluation of derivative-based global sensitivity measures. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(7) :1135–1148.
- Lions, J. L. (1971). *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Springer-Verlag.
- Maciejowski, J. M. (2002). *Predictive Control : With Constraints*. Pearson Education.
- Merheb, R. (2013). *Fiabilité des outils de prevision du comportement des systemes thermiques complexes*. PhD thesis, Universite de Bordeaux 1.
- Nassiopoulos, A. et Bourquin, F. (2010). Real-time monitoring of building energy behaviour : a conceptual framework.
- Nilsson, H. O. (2004). *Comfort climate evaluation with thermal manikin methods and computer simulation models*. Arbetslivsinstitutet, Stockholm.
- Richalet, J., Rault, A., Testud, J. L., et Papon, J. (1978). Model predictive heuristic control : Applications to industrial processes. *Automatica*, 14(5) :413–428.
- Sobol, I. et Kucherenko, S. (2009). Derivative based global sensitivity measures and their link with global sensitivity indices. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(10) :3009–3017.
- Spitz, C., Mora, L., Jay, A., et Wurtz, E. (2011). Analyse de sensibilité et d'incertitude du comportement thermique d'un logement.