

# Elaboration de lois heuristiques à partir de la programmation dynamique : application à l'effacement de la consommation électrique de pointe dans les bâtiments performants

Maxime Robillart\*<sup>1</sup>, Patrick Schalbart<sup>1</sup>, Bruno Peuportier<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CES - Centre Efficacité énergétique des Systèmes, MINES ParisTech  
60 boulevard Saint-Michel, 75272 Paris Cedex 06 (France),  
[\\*maxime.robillart@mines-paristech.fr](mailto:maxime.robillart@mines-paristech.fr)

---

*RESUME. En France, 40 % des bâtiments sont chauffés avec des équipements électriques, entraînant des pointes hivernales importantes. Dans cette optique, des stratégies optimales, prenant en compte différentes contraintes (de confort et de puissance maximale du chauffage) et visant à décaler une partie de la consommation du chauffage en utilisant la masse thermique du bâtiment, ont été élaborées grâce à la programmation dynamique. Cependant, cette méthode d'optimisation est coûteuse en temps de calcul et difficilement applicable à la régulation en temps réel. Pour ce faire, il existe des techniques statistiques permettant d'établir des lois heuristiques à partir des résultats de la programmation dynamique. Elles donnent lieu à l'identification de lois reliant le choix d'une action à des variables explicatives. Dans cette étude, la loi heuristique choisie est un modèle linéaire généralisé car il est capable de reproduire les caractéristiques générales des résultats de l'optimisation, avec un coût de calcul très faible.*

*MOTS-CLÉS : lois heuristiques, contrôle optimal, effacement de la pointe électrique.*

---

*ABSTRACT. In France, 40 % of buildings are heated with electrical devices causing high peak loads in winter. In this context, optimal strategies (under constraints related to comfort and maximum heating power) have been developed with the dynamic programming method to shift electricity consumption used for heating taking advantage of the building thermal mass. However, this exact optimisation method is time-consuming and can hardly be applied to real-time control. Complementary statistical techniques exist that allow for the "extraction" of logistic decision models from the optimal control simulation results. These rule extraction techniques model the relationship between a response variable and explanatory variables. In this study, a generalised linear model was used because it is able to mimic the general characteristics of the dynamic programming results with a small computational expense.*

*KEYWORDS : Rule extraction, optimal control, load shifting.*

---

## 1. INTRODUCTION

La régulation énergétique d'un bâtiment répond à de nombreux objectifs tels que le maintien du confort thermique (Mathews et al. 2000), la diminution des consommations énergétiques (Nygard Ferguson 1990) ou encore la réduction de la consommation d'électricité de pointe (Greensfelder et al. 2011). Pour y répondre, le système de régulation doit être capable d'anticiper les variations de la température extérieure, des apports solaires et internes, ainsi que de l'occupation. Dounis et Caraiscos (2009) présentent ainsi de nombreux systèmes de commande répondant à ces objectifs. La programmation dynamique est une de ces méthodes permettant de trouver la régulation optimale. Elle a déjà été utilisée pour la régulation thermique du bâtiment (Bauer 1998) mais aussi pour l'effacement

de la consommation électrique de pointe du chauffage (Favre 2013). Cependant, cette méthode est coûteuse en temps de calcul et son application est difficilement envisageable à la régulation en temps réel. Une alternative consiste à établir des lois heuristiques à partir des résultats de la programmation dynamique. L'idée est d'en déduire une stratégie opérationnelle en identifiant des lois reliant le choix d'une action à des variables explicatives (état présent du système, prévisions météo, etc.). Ces lois sont déterminées dans l'objectif de minimiser la fonction coût et de se rapprocher de la stratégie optimale. Cette méthode a été appliquée tout d'abord au contrôle en temps réel des inondations où des lois simplifiées de gestion des réservoirs sont déterminées à partir des résultats d'un contrôleur prédictif optimal (MPC, Model Predictive Control) (Wei et Hsu 2009). Dans la régulation thermique des bâtiments, elle a été appliquée pour reproduire la loi de commande de l'ouverture des fenêtres déterminées par un MPC (May-Ostendorp et al. 2013). Le travail présenté dans la suite se base sur le développement d'un modèle linéaire généralisé à partir des résultats obtenus par la programmation dynamique (Favre 2013). L'étude de cas concerne la gestion énergétique d'un bâtiment pendant une période hivernale et l'effacement de la consommation électrique de pointe.

## 2. METHODE

### 2.1. MODELE THERMIQUE DYNAMIQUE DU BATIMENT

Le modèle thermique du bâtiment utilisé dans cette étude repose sur le concept de « zone thermique », sous-ensemble du bâtiment considéré à température homogène (Peuportier et Blanc-Sommereux 1990). Pour chaque zone, les murs sont divisés en mailles suffisamment fines pour avoir une température homogène. L'air, le mobilier et les cloisons légères sont regroupés dans une maille unique. Un bilan thermique est appliqué sur chaque maille et prend la forme suivante :

$$C_{maille} \frac{dT_{maille}}{dt} = Gains - Pertes \quad (1)$$

$C_{maille}$  étant la capacité thermique de la maille,  $T_{maille}$  sa température,  $Pertes$  comprenant les transferts thermiques par conduction, convection et rayonnement, et  $Gains$  les apports solaires et internes ainsi que les puissances de chauffage ou de refroidissement des équipements. L'ensemble des équations peut être représenté sous la forme d'un système linéaire continu et invariant :

$$\begin{cases} C\dot{T}(t) = AT(t) + EU(t) \\ Y(t) = JT(t) + GU(t) \end{cases} \quad (2)$$

avec  $T$  le champ discrétisé des températures,  $C$  la matrice diagonale des capacités thermiques,  $U$  le vecteur des sollicitations,  $Y$  le vecteur des sorties (température intérieure prenant en compte l'air et les surfaces des murs) et  $A$ ,  $E$ ,  $J$ ,  $G$  les matrices reliant les vecteurs  $T(t)$  et  $U(t)$  aux dynamiques du système. Ce système étant d'ordre élevé, il est réduit par analyse modale pour rendre sa résolution plus rapide. La simulation de ce modèle nécessite de connaître les sollicitations, en particulier les émissions de chaleur par les occupants et les équipements, mais également les données météorologiques locales concernant la température extérieure et le rayonnement solaire.

### 2.2. PROGRAMMATION DYNAMIQUE

La programmation dynamique est une méthode d'optimisation développée par R. Bellman (1966). Il s'agit d'un algorithme d'optimisation séquentiel permettant d'obtenir l'optimum global en balayant

l'ensemble des solutions possibles étant donnée une discrétisation. L'algorithme se base sur le principe d'optimalité de Bellman qui stipule : « *Une politique optimale ne peut être formée que de sous politiques optimales* » Dans notre cas, l'algorithme a pour but de déterminer un ensemble de commandes (puissance du chauffage) permettant de minimiser la fonction coût sur la période considérée, en tenant compte des contraintes en termes de confort et de commande (puissance maximale de l'équipement de chauffage).

### 2.3. LOIS HEURISTIQUES : MODELES LINEAIRES GENERALISES

Les modèles linéaires généralisés (GLM, Generalised Linear Models) permettent d'étudier la liaison entre une variable dépendante, ou réponse  $Y$ , et un ensemble de variables explicatives  $X_j$ . Ils sont formés de trois composantes : une composante aléatoire (avec la réponse  $Y$  à laquelle est associée une loi de probabilité), une composante déterministe (combinaison linéaire des variables explicatives) et un lien (qui décrit la relation fonctionnelle entre la combinaison linéaire des variables explicatives et l'espérance mathématique de la réponse  $Y$ ). Plusieurs fonctions de lien peuvent être utilisées selon la distribution réelle de la variable d'intérêt et de son erreur. Le modèle à ajuster est donc :

$$f(E(Y)) = \sum_j a_j X_j + b \quad (3)$$

où  $f$  est la fonction de lien et  $E(Y)$  l'espérance mathématique de  $Y$ . Les paramètres du modèle sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance (critère d'information d'Akaike, AIC).

## 3. METHODOLOGIE

Dans la méthodologie utilisée, la programmation dynamique génère des données d'entraînement et de validation qui sont respectivement utilisées pour identifier les paramètres du GLM et évaluer ses performances. Pour cela, on considère des données météorologiques types et on applique la programmation dynamique pour calculer la stratégie optimale. Cette stratégie optimale (données d'entraînement) sert alors à identifier les paramètres des modèles heuristiques sur ces mêmes données. La performance des modèles heuristiques est ensuite évaluée sur des données météorologiques réelles, provenant de relevés, en comparant les résultats obtenus par les méthodes heuristiques à la stratégie optimale calculée par la programmation dynamique (données de validation).

### 3.1. IDENTIFICATION DES MODELES

L'identification des modèles GLM se fait en quatre étapes (figure 1). La première correspond à la récupération des données nécessaires à la programmation dynamique (données météo d'une année type, tarifs de l'électricité, prévisions du comportement). La deuxième consiste à calculer la stratégie optimale avec la programmation dynamique (données d'entraînement). La troisième permet alors d'identifier les modèles GLM à partir de la stratégie optimale. Enfin, dans la quatrième les modèles GLM sont implémentés dans une plateforme de simulation thermique dynamique (COMFIE).

### 3.2. COMPARAISON DES MODELES

La comparaison des modèles GLM se fait en trois étapes (figure 2). La première correspond à la récupération des données nécessaires pour l'optimisation. La deuxième consiste à utiliser la programmation dynamique et les modèles GLM implémentés pour déterminer la stratégie optimale et les stratégies opérationnelles. Enfin, dans la troisième, les résultats sont comparés.

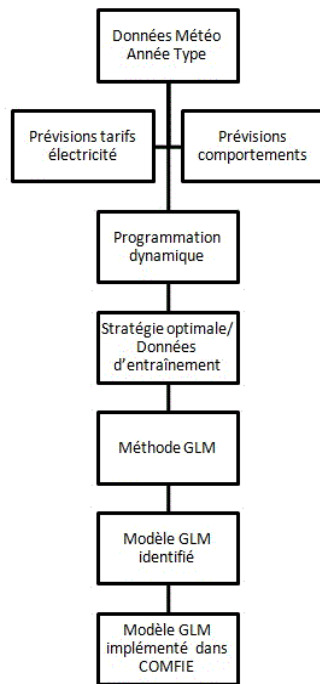


Figure 1 : Identification des modèles

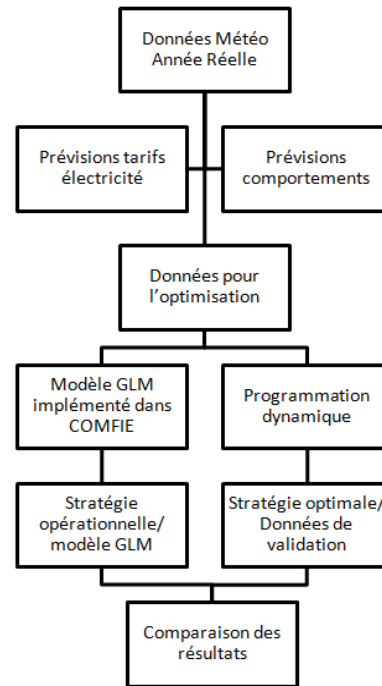


Figure 2 : Comparaison des modèles

## 4. PRESENTATION DU CAS D'ETUDE

### 4.1. DESCRIPTION DU BATIMENT

Le bâtiment étudié s'inspire d'une maison expérimentale de la plateforme « INCAS » de l'INES. D'une surface habitable totale de 89 m<sup>2</sup>, il comporte deux étages. La façade sud du bâtiment comprend une grande surface vitrée (34 % de la surface) avec des protections solaires alors que la paroi nord a deux petites fenêtres. Toutes les fenêtres sont à double vitrage basse émissivité sauf celles qui sont en façade nord qui ont un triple vitrage. La maison est fortement isolée avec une inertie lourde comme montré dans le tableau 1.

Tableau 1 : Composition des parois de la maison étudiées

	Murs extérieurs	Combles	Plancher bas	Plancher intermédiaire	Cloisons intérieures
Composition (ext → int)	20 cm de polystyrène 15 cm de béton lourd	40 cm de laine de verre 1.5 cm de plaque de plâtre	25 cm de polystyrène 20 cm de béton lourd	20 cm de béton lourd	2*1.5 cm de plâtre 4 cm de laine de verre
U (W/m <sup>2</sup> .K)	0,15	0,09	0,12	3,13	0,96

La ventilation mécanique est de type double flux avec un récupérateur de chaleur d'une efficacité de 0,7. Le débit considéré pour le renouvellement d'air est de 0,6 vol/h (incluant 0,03 vol/h pour les infiltrations) quand le bâtiment est occupé et de 0,3 vol/h dans le cas contraire. Le modèle thermique du bâtiment est monozone et selon les résultats de la simulation thermique dynamique effectuée avec COMFIE, les besoins de chauffage annuels sont de 14 kWh/m<sup>2</sup>.

### 4.2. PARAMETRES DE L'OPTIMISATION

#### 4.2.1. Paramètres de la programmation dynamique

L'optimisation est réalisée sur un horizon de 34 jours avec un pas de temps d'une heure pour générer les données d'entraînement et de validation (en prenant en compte des données

météorologiques différentes). La variable d'état choisie pour la programmation dynamique est l'énergie totale  $E$  stockée dans le bâtiment. Elle est calculée de la manière suivante (Favre 2013) :

$$E = \sum_{i=1}^{nbr\_mailles} E_i = \sum_{i=1}^{nbr\_mailles} C_i T_i \quad (4)$$

Avec  $C_i$  la capacité thermique de la maille  $i$  et  $T_i$  la température de cette maille. Pour assurer le confort thermique dans le bâtiment, la température intérieure ne doit pas passer en dessous de  $19^{\circ}\text{C}$ , ni varier de plus de  $2,2^{\circ}\text{C/h}$  (ASHRAE 2003). La simulation prend en compte deux semaines d'initialisation. L'occupation du bâtiment est celle d'une famille de 4 personnes : le bâtiment est occupé à 100 % de 18h à 8h, à 50 % de 17h à 18h. Le weekend, les 4 personnes sont continuellement présentes. Chaque occupant émet 80 W par son métabolisme ; les apports internes des équipements sont également pris en compte. La puissance de chauffage est comprise dans l'intervalle  $[0 \text{ W}, 5000 \text{ W}]$  et le nombre de discrétisations de la variable d'état est de 800.

#### 4.2.2. Tarification de l'électricité

Trois périodes sont considérées pour le prix du kWh d'électricité (tableau 2).

*Tableau 2 : Tarifs des heures creuses, pleines et de pointe*

	Heures creuses	Heures pleines	Heures de pointe
Horaire	0h-9h	9h-17h 22h-0h	17h-22h
Prix du kWh en €	0.0864	0.1275	0.255

#### 4.2.3. Données météo

Les données météorologiques d'entraînement correspondent aux données MétéoNorm de la station de Chambéry tandis que les données de validation correspondent aux données de l'Aéroport du Bourget du Lac (du 15 janvier au 17 février). Les principales caractéristiques météorologiques sont données dans le tableau 3.

*Tableau 3 : Données météorologiques*

	Données d'entraînement	Données de validation
Température minimale ( $^{\circ}\text{C}$ )	-9,10	-14
Température moyenne ( $^{\circ}\text{C}$ )	1,44	-0,22
Température maximale ( $^{\circ}\text{C}$ )	11,50	11,33
Rayonnement global horizontal moyen ( $\text{W/m}^2$ )	58	60
Rayonnement global horizontal maximal ( $\text{W/m}^2$ )	486	569

### 4.3. EVALUATION DES RESULTATS

L'évaluation des résultats se fera sur les données de validation à partir des indicateurs suivants : l'écart moyen relatif (EMR), la puissance moyenne, le coût cumulé, le pourcentage d'heures de pointe effacées, le pourcentage d'heures pleines effacées, et les taux d'inconfort  $TI_{min}$  et  $TI_{max}$  (nombres d'heures en % où la température a dépassé  $19^{\circ}\text{C}$  ou  $26^{\circ}\text{C}$ ).

## 5. RESULTATS OBTENUS PAR LES MODELES LINEAIRES GENERALISES

### 5.1. VARIABLES EXPLICATIVES UTILISEES

La puissance de chauffage  $P$  à  $t+\Delta t$  est dépendante de variables explicatives au temps  $t+\Delta t$  : la température extérieure  $T$  et le rayonnement solaire global horizontal ; et de variables explicatives au

temps  $t$  : le tarif de l'électricité, la température de la zone, la puissance de chauffage et l'énergie totale stockée dans le bâtiment.

## 5.2. MODELES DEVELOPPES

Pour appliquer le GLM, la variable à prédire doit être transformée sous la forme d'un pourcentage. Nous utilisons alors le pourcentage de la puissance maximale, à savoir 5000 W. Ainsi, si la puissance de chauffage au pas de temps  $t+\Delta t$  vaut 2500 W, la valeur de la variable à prédire par le GLM sera de 50 %. La méthode statistique utilisée dans notre modèle linéaire généralisé est alors une régression logistique et la fonction de lien utilisée est la fonction logit :  $f(x) = \ln(x/(1-x))$ . Nous obtenons donc l'équation suivante:

$$\ln\left(\frac{E(Y)}{1-E(Y)}\right) = a_1 X_1 + \dots + a_j X_j + b \quad (5)$$

Cinq modèles ont été développés, chacun entraîné sur tout ou partie des données d'entraînement, DE (tableau 4). Dans l'implémentation,  $P(t+\Delta t)$  est fixée à 0 dans les cas suivants : en heures de pointe pour les modèles GLM\_2, GLM\_3, GLM\_4 et GLM\_5 ; en heures pleines pour les modèles GLM\_3 et GLM\_5.

Tableau 4 : Données d'entraînement pour l'identification des modèles GLM

	Heures creuses	Heures pleines	Heures de pointe
GLM_1	DE	DE	DE
GLM_2	DE	DE	-
GLM_3	DE	-	-
GLM_4	DE	DE	DE
GLM_5	DE	DE	DE

## 5.3. PREMIERS RESULTATS

Les résultats obtenus sur les données de validation par les modèles GLM après implémentation dans la plateforme de simulation sont indiqués dans le tableau 5 (les résultats de référence obtenus par la programmation dynamique sont présentés dans la colonne PD).

Tableau 5 : Résultats des modèles GLM

	GLM_1	GLM_2	GLM_3	GLM_4	GLM_5	PD
Puissance moyenne (W)	2113	2060	896	2060	1747	907
Coût cumulé (€)	219	173	63	173	123	65
Heures de pointe effacées (%)	0	100	100	100	100	99,4
Heures pleines effacées (%)	0	0	100	0	100	89
$TI_{min}$ (%)	0	0	20 (écart moyen - 0,3°C)	0	0	0
$TI_{max}$ (%)	96 (écart moyen 4,6°C)	95 (écart moyen 4,1°C)	0	95 (écart moyen 4,1°C)	69 (écart moyen 1,8°C)	0
$T^{\circ}min / T^{\circ}max$ (°C)	20,8 / 32,6	20,8 / 32,3	17,9 / 22,2	20,8 / 32,3	19,8 / 30,9	19 / 23,3
EMR (%)	-133	-127	1	-127	-93	-

On constate que les modèles GLM\_1, GLM\_2, GLM\_4 et GLM\_5 ont des taux d'inconfort ( $TI_{max}$ ) non négligeables (compris entre 69 % et 96 %) avec des écarts moyen de dépassement de contrainte compris entre +1,8°C et +4,6°C. Enfin, leurs indicateurs EMR sont pratiquement tous supérieurs à 100 %. Ainsi, les modèles GLM\_1, GLM\_2, GLM\_4 et GLM\_5 n'arrivent pas à reproduire le comportement de la programmation dynamique de manière satisfaisante et ne sont donc pas retenus comme candidats pour un système de régulation simplifié. Cependant, on peut noter le comportement intéressant du modèle GLM\_3. Tout d'abord, de par sa construction, il permet d'effacer 100 % des

heures de pointe et pleines. Son taux d'inconfort ( $TI_{min}$ ) de 20 % peut paraître important, mais il présente un écart moyen (lors du non respect de la température minimale de 19°C) de 0,3°C. Ainsi en moyenne, pendant 20 % du temps, le modèle chauffe à 18,7°C au lieu de 19°C (avec une température minimale atteinte de 17,9°C). Il s'agit donc d'un non respect de contrainte acceptable. On peut également remarquer que ce modèle présente un EMR de 1 %, ce qui est satisfaisant. Son coût cumulé de 63 € est inférieur au coût cumulé de la programmation dynamique (65 €) à cause du non respect des contraintes de température. Enfin, le temps de calcul du modèle GLM\_3, de l'ordre de 1 s est 150 fois plus rapide que celui de la programmation dynamique sur un ordinateur de bureau.

Le modèle GLM\_3 est donc un bon candidat pour un système de régulation simplifié. Un contrôleur, qui est activé dès que la température de la zone ne respecte pas les contraintes de confort, peut être mis en place pour améliorer son comportement.

#### 5.4. APPLICATION D'UN CONTRÔLEUR

Le contrôleur considéré est un contrôleur de type proportionnel. Sa loi de contrôle est la suivante :

$$P(t + \delta t) = \begin{cases} K(T^{\circ}_{min} - T(t)) & T(t) \leq T^{\circ}_{min} \\ GLM\_3 & T^{\circ}_{min} < T(t) < T^{\circ}_{max} \\ 0 & T(t) \geq T^{\circ}_{max} \end{cases} \quad (6)$$

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 6.

Tableau 6 : Résultats du modèle GLM\_3 avec contrôleur

	GLM_3 sans contrôleur	GLM_3 avec contrôleur	PD
Puissance moyenne (W)	896	913	907
Coût cumulé (€)	63	68	65
Heures de pointe effacées (%)	100	95,6	99,4
Heures pleines effacées (%)	100	93,5	89
$TI_{min}$ (%)	20 (écart moyen -0,3°C)	4 (écart moyen -0,07°C)	0
$TI_{max}$ (%)	0	0	0
$T^{\circ}_{min} / T^{\circ}_{max}$ (°C)	17,9 / 22,2	18,6 / 22,6	19 / 23,3
EMR (%)	1	-1	-

L'utilisation d'un contrôleur associé au modèle GLM\_3 permet de diminuer le taux d'inconfort  $TI_{min}$ . Cet indicateur passe ainsi de 20 % de taux d'inconfort (écart moyen de 0,3°C) à 4 % (écart moyen de 0,07°C). De plus, la température minimale atteinte passe de 17,9°C à 18,6°C. Enfin, on constate une diminution du pourcentage des heures de pointe et pleines effacées, de par l'utilisation du contrôleur dès que la température est inférieure à 19°C. Ainsi, l'ajout d'un contrôleur au modèle GLM\_3 permet d'améliorer ses performances tout en limitant les dépassements de contrainte de température. La figure 3 illustre le comportement du modèle GLM\_3 avec et sans contrôleur.

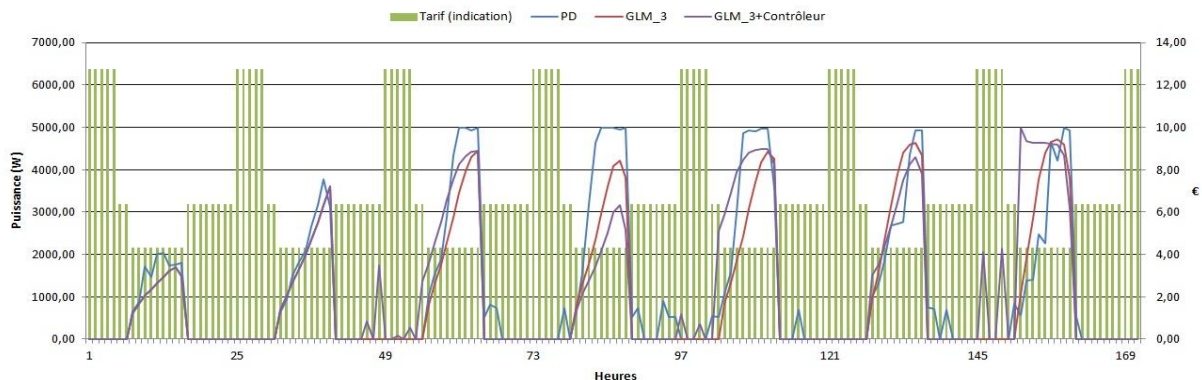


Figure 3 : Puissance de chauffage calculée par la programmation dynamique et les modèles GLM\_3

## 6. CONCLUSION

Une technique statistique (modèle linéaire généralisé) permettant d'établir des lois heuristiques à partir des résultats de la programmation dynamique a été présentée. Cette méthode a été utilisée car elle permet de reproduire les caractéristiques générales des résultats de l'optimisation, avec un coût de calcul très faible. Les résultats montrent que le modèle linéaire généralisé reproduit le comportement global de la programmation dynamique avec des dépassements limités des consignes. Pour améliorer les performances et diminuer les heures où la température est inférieure à 19°C ( $TI_{min}$ ) un contrôleur de type proportionnel a été ajouté au modèle linéaire généralisé. Les résultats montrent une diminution du taux d'inconfort avec une détérioration très faible du pourcentage des heures pleines et de pointe effacées. En conclusion, l'utilisation de lois heuristiques, déterminées à partir des résultats d'une optimisation exacte, s'avère pertinente d'autant plus que la formulation mathématique simple du modèle linéaire généralisé permet d'envisager de l'implémenter dans des systèmes de commande de bâtiments en temps réel.

### Remerciements :

Ce travail a été supporté par le projet ANR PRECISION.

## 7. BIBLIOGRAPHIE

- ASHRAE, American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers. 2003. « Thermal Environmental Conditions for Human Occupancy ». *Third Public Review*.
- Bauer, Manuel. 1998. « Gestion biomimétique de l'énergie dans le bâtiment ». Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Bellman, R. 1966. « Dynamic Programming ». *Science* 153 (3731): 34- 37.
- Dounis, A.I., et C. Caraiscos. 2009. « Advanced control systems engineering for energy and comfort management in a building environment—A review ». *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 13 (6-7): 1246- 1261. doi:10.1016/j.rser.2008.09.015.
- Favre, Bérenger. 2013. « Etude de stratégies de gestion énergétique des bâtiments par l'application de la programmation dynamique ». Thèse de doctorat, MINES ParisTech.
- Greensfelder, Erik M., Gregor P. Henze, et Clemens Felsmann. 2011. « An investigation of optimal control of passive building thermal storage with real time pricing ». *Journal of Building Performance Simulation* 4 (2): 91- 104. doi:10.1080/19401493.2010.494735.
- Mathews, E. H., D. C. Arndt, C. B. Piani, et E. van Heerden. 2000. « Developing cost efficient control strategies to ensure optimal energy use and sufficient indoor comfort ». *Applied Energy* 66 (2): 135- 159. doi:10.1016/S0306-2619(99)00035-5.
- May-Ostendorp, Peter T., Gregor P. Henze, Balaji Rajagopalan, et Doreen Kalz. 2013. « Experimental investigation of model predictive control-based rules for a radiantly cooled office ». *HVAC&R Research* 19 (5): 602- 615. doi:10.1080/10789669.2013.801303.
- Nygaard Ferguson. 1990. « Predictive thermal control of building systems ». Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Peuportier, Bruno, et Isabelle Blanc-Sommereux. 1990. « Simulation tool with its expert interface for thermal design of multizone buildings ». *International Journal of Solar Energy* 8 (2): 109- 120. doi:10.1080/01425919008909714.
- Wei, Chih-Chiang, et Nien-Sheng Hsu. 2009. « Optimal tree-based release rules for real-time flood control operations on a multipurpose multireservoir system ». *Journal of Hydrology* 365 (3-4): 213- 224. doi:10.1016/j.jhydrol.2008.11.038.