Calcul des facteurs de forme entre polygones – Application à la thermique urbaine et aux études de confort

Mateusz Bogdan*[1], Edouard Walther[1], Marc Alecian[2], Mina Chapon[2]

[1] AREP L'hypercube,
16, avenue d'Ivry,
75013 PARIS.
***mateusz.bogdan@arep.fr**
[2] École Normale Supérieure - Paris Saclay,
4, avenue des Sciences,
91190 Gif-sur-Yvette.

RÉSUMÉ. Il est possible d'améliorer la modélisation des échanges radiatifs en thermique du bâtiment et du calcul de la température radiante pour l'évaluation du confort en utilisant les facteurs de forme de rayonnement. Leur détermination n'est cependant pas immédiate, notamment concernant les échanges entre un individu et une paroi. Dans ce travail, une méthode existante de calcul des facteurs de forme est exposée puis validée sur des cas analytiques. Elle sert ensuite à créer des abaques de facteur de forme entre un individu et différentes parois. Une application directe de la méthode est présentée, pour le calcul de confort en environnement urbain.

MOTS-CLÉS : facteur de forme, température radiante, python.

ABSTRACT. Accurate View Factor determination is both a key step for Mean Radiant Temperature (MRT) assessments in the context of comfort studies, and a key point in improving Building Energy Simulation radiative exchanges modelling. The determination is not straight forward, knowingly between an individual an its surroundings. This work presents first a numerical procedure for View Factor computations that is validated against analytical cases. Then some abacuses for an individual to a wall or a ceiling. Finally, an application of the presented method is shown for comfort estimations in urban studies.

KEYWORDS : View Factor, Radiant Temperature, Python.

1. INTRODUCTION

La prise en compte des facteurs de forme (FF) dans la détermination des échanges radiatifs prend toute son importance lors d'études thermiques liées aux effets d'îlot de chaleur urbain ou à des études de confort faisant intervenir des modèles du métabolisme humain et requérant un calcul détaillé de la température radiante moyenne (désignée dans la littérature anglophone par *Mean Radiant Temperature* - MRT). Celle-ci est définie comme la température des parois d'une enceinte qui provoquerait le même flux radiatif reçu que l'environnement réel. Pour des parois d'émissivité égale, on la calcule comme la somme des contributions en grande et courte longueur d'onde :

$$T_r = \sqrt[4]{\Sigma F_i T_i^4 + \frac{\alpha \varphi_s}{\sigma \epsilon}} \; [K]$$

Où F_i et T_i sont respectivement le facteur de forme paroi-individu et la température de paroi et $\alpha\varphi_s$ est le flux solaire absorbé par l'individu. On se concentrera ici sur les calculs en grande longueur d'onde.

Les modèles actuels de thermique du bâtiment considèrent la température moyenne radiante par des approches simplifiées, généralement calculée comme une moyenne des températures d'air et de surface ou comme un barycentre pondéré des surfaces des parois de la zone thermique (EnergyPlus 2020). À condition de le connaître, il est possible dans certains outils de donner le facteur de forme entre l'individu et la paroi pour obtenir la MRT. Il s'agit alors de déterminer la forme de l'individu et la valeur du FF par rapport aux parois. Un état de l'art a été fait dans (Vorre 2015) et présente les méthodes disponibles (abaques, splines, lancer de rayon) ainsi qu'une méthode de calcul du facteur de forme entre un individu et une surface.

D'autre part, le développement des capacités de calcul, notamment la possibilité d'intégrer les facteurs de forme de l'environnement urbain proche dans EnergyPlus (Luo 2020), ou la nécessité de les calculer lorsqu'on souhaite déterminer le niveau de confort dans un environnement urbain, par exemple avec l'approche de (Walther 2021) poussent vers le développement d'un outil de calcul numérique des FF plus aisément accessible. Ainsi, la création d'un code de calcul permettant de déterminer de façon rapide les FF entre surfaces planes polygonales a été entrepris.

De plus, les abaques disponibles donnant le facteur de forme entre un individu et une paroi sont peu fournis et ne font pas référence à certaines situations usuellement rencontrées dans le bâtiment. Il y a ainsi un intérêt à la fois pédagogique et technique pour les bureaux d'études à disposer d'abaques et un intérêt pratique de pouvoir calculer automatiquement les facteurs de forme dans diverses configurations.

Dans la suite de ce travail, on présente d'abord les fondamentaux du calcul de facteur de forme, puis une validation *versus* des solutions analytiques connues. Des abaques de FF individu-paroi sont ensuite donnés et des applications sont présentées.

2. CALCUL DES FACTEURS DE FORME

L'approche repose sur les travaux de (Mazumder et Ravishankar 2012) et (Schmid 2016), et son implémentation par (Alecian 2021). Cette approche considère les FF uniquement entre faces planes. Ce choix est lié au format des géométries numériques, où les surfaces sont systématiquement discrétisées en sous-surfaces planes. Le calcul repose sur un calcul d'intégrales de contours unitaires, plutôt que surfaciques, grâce au théorème de Stokes et à un changement de variable. Les singularités inhérentes à la méthode (e.g. le cas de polygones adjacents partageant un côté) sont traitées à l'aide de formules analytiques, ou d'approches numériques selon les cas.

2.1. CAS GENERAL

L'expression la plus générique du facteur de forme entre deux surfaces S_i et S_j et donnée par l'Eq. (1), où dS_i et dS_j représentent les surfaces élémentaires respectives, selon la Figure 1.

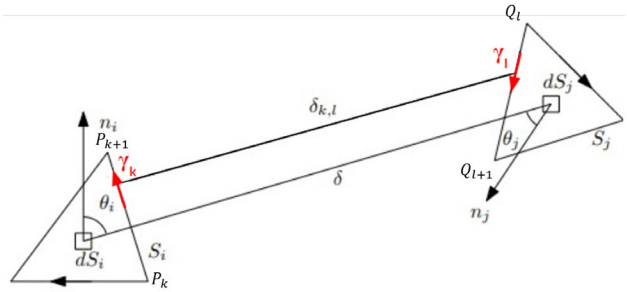


Figure 1 - Caractéristiques géométriques des surfaces élémentaires

$$F_{i,j} = \frac{1}{S_i} \iint_{S_i} \iint_{S_j} \frac{\cos(\theta_j)\cos(\theta_i)}{\delta^2} dS_j\, dS_i \tag{1}$$

L'utilisation du théorème de Stokes, qui permet de passer d'une intégrale de surface à une intégrale de contour permet de réduire cette expression à l'Eq. (2)

$$F_{i,j} = \frac{1}{2\pi S_i} \oint \oint \ln(\delta_{k,l})\, d\gamma_l\, d\gamma_k \tag{2}$$

L'idée clé de l'approche proposée dans (Mazumder et Ravishankar 2012) et de traiter des paires de « bords » des surfaces planes, avec un changement de variable (Eq. 3), puis de considérer la décomposition de la distance entre éléments de contour $\overrightarrow{\delta_{k,l}}$ selon l'Eq. (4), se ramenant ainsi à une intégrale « simple » (logarithme de polynôme), bornée entre 0 et 1 (voir Eq. (5)).

$$\begin{cases} \overrightarrow{\gamma_{k,k+1}} = \lambda_P \overrightarrow{P_{k,k+1}} \\ \overrightarrow{\gamma_{l,l+1}} = \lambda_Q \overrightarrow{Q_{l,l+1}} \end{cases}$$

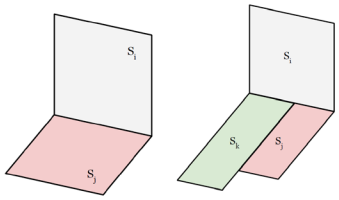
$$\begin{cases} d\overrightarrow{\gamma_{k,k+1}} = \overrightarrow{P_{k,k+1}} d\lambda_P \\ d\overrightarrow{\gamma_{l,l+1}} = \overrightarrow{Q_{l,l+1}} d\lambda_Q \end{cases} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{\delta_{k,l}} = \overrightarrow{P_k Q_l} + \lambda_Q \overrightarrow{Q_{l,l+1}} - \lambda_P \overrightarrow{P_{k,k+1}} \tag{4}$$

$$F_{i,j} = \frac{1}{4\pi S_i} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{M} \overrightarrow{P_{k,k+1}}\, \overrightarrow{Q_{l,l+1}} \times \int_0^1 \int_0^1 \left[\ln\left(\lambda_P^2 \left|\overrightarrow{P_{k,k+1}}\right|^2 + \lambda_Q^2 \left|\overrightarrow{Q_{l,l+1}}\right|^2 + 2\lambda_P \lambda_Q \overrightarrow{P_{k,k+1}}\, \overrightarrow{Q_{l,l+1}} + 2\lambda_P \overrightarrow{Q_l P_k}\, \overrightarrow{P_{k,k+1}} - 2\lambda_Q \overrightarrow{Q_l P_k}\, \overrightarrow{Q_{l,l+1}} + \left|\overrightarrow{Q_l P_k}\right|^2 \right) \right] d\lambda_P\, d\lambda_Q \tag{5}$$

2.2. TRAITEMENT DES SINGULARITES

Deux types de singularités peuvent apparaître, du fait de la présence d'une part du logarithme (Eq. (2)), et d'autre part de la décomposition du vecteur élémentaire (Eq. (4)). Ces singularités sont liées à la présence de côtés partagés entre surfaces, tel que représenté sur la Fig. 2.



(a) (b)

Figure 2 - Singularités géométriques

Le cas de la Fig. 2(a), où l'intégralité d'un côté est commun, peut être résolue à l'aide d'une formule analytique issue de (Amrit et Venkateshan 1993), où la contribution du « bord partagé » est remplacée dans la sommation de l'Eq. (5) par Eq. (6) :

$$\Delta F_{cp} = \left|\overrightarrow{d_{cp}}\right| \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\left|\overrightarrow{d_{cp}}\right|^2\right)\right) \tag{6}$$

Où $\left|\overrightarrow{d_{cp}}\right|$ est la longueur du côté partagé.

Pour la seconde singularité (Fig. 2(b)), lorsque seule une fraction du bord est partagée, il est proposé de séparer « virtuellement » les surfaces d'une distance infinitésimale (10^{-3} m), négligeable au vu des échelles et niveaux de détails requis dans des études urbaines et/ou liées au bâtiment. La pertinence de cette hypothèse est montrée dans la section suivante, avec une comparaison à une solution analytique.

2.3. REDUCTION DU NOMBRE DE CALCULS A TRAITER

Afin de réduire les temps de calcul lors du traitement d'une géométrie complexe, typiquement une scène urbaine, trois stratégies différentes sont mises en œuvre :

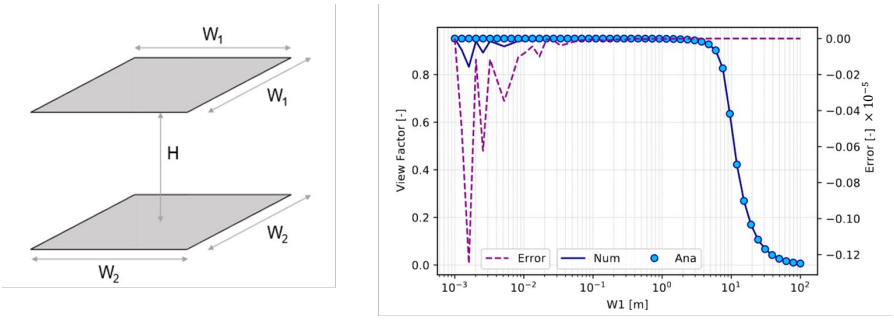
- Détection a priori de la visibilité entre deux cellules (produit scalaire entre les normales et le vecteur directeur reliant les centroïdes des cellules), adapté de (Schmid 2016),
- Détection des obstructions entre des cellules à l'aide d'un lancer de rayon, réalisée à l'aide de la librairie Python PyVista (Sullivan et Kaszynski 2019),
- Enfin, lorsque la finalité de ces développements est liée à des études urbaines, des critères de distances absolues entre cellules sont mis en œuvre (non développés ici), au-delà desquelles les FF sont considérés comme négligeable (*e.g.* lorsque leur valeur est inférieure à 10^{-3}).

Cette stratégie permet de réduire considérablement les temps de calcul, rendant possible la détermination des FF pour une scène urbaine complète d'une dizaine de milliers de cellules (Figure 6) en quelques minutes sur un ordinateur portable avec un langage interprété.

3. VALIDATION

Le code a ensuite été validé sur plusieurs cas analytiques, dont on ne présente qu'une sélection ci-après. Les formules analytiques sont tirées de (Modest 2003), par souci de concision elles ne sont pas reproduites ici.

3.1. DEUX PLAQUES CARREES CO-AXIALES

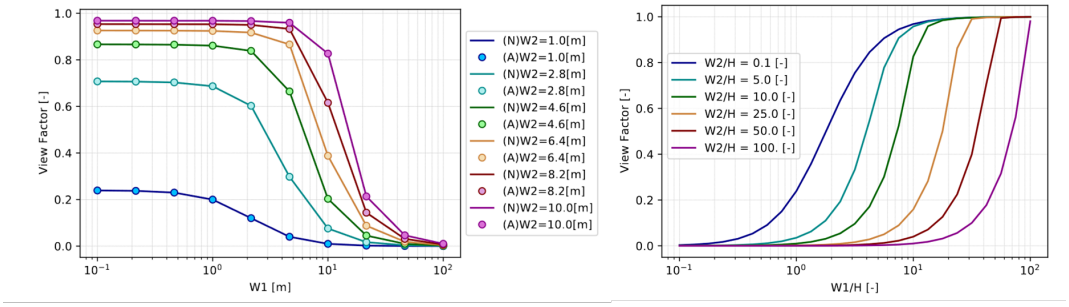


(a) (b)

Figure 3 - FF entre surfaces carrées co-axiales (a) définition géométrique, (b) Comparaison Analytique vs. Numérique pour H=1m et W_2=8m

On constate une très bonne correspondance entre les formules analytiques et le calcul numérique d'intégration. Les erreurs absolues constatées ne sont significatives que pour $W_1/W_2 < 10^{-3}$, cas qui n'apparait que de façon anecdotique, et qui est aisément « résolu » lors du travail sur les géométries.

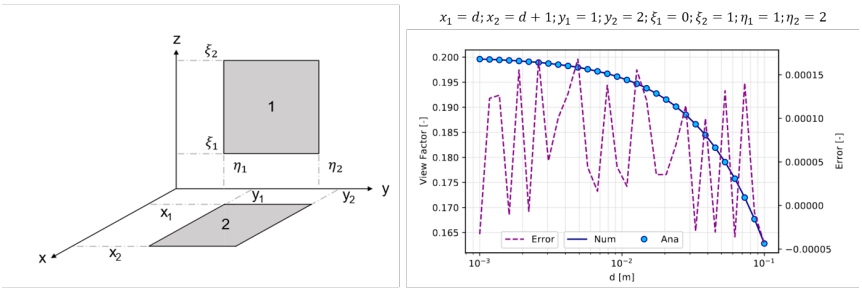
D'autres cas sont présentés ci-après (*Figure 4*) pour des dimensions probables dans le contexte urbain d'étude d'ingénierie. Les concordances des résultats numériques *versus* analytique sont assurées.



(a) (b)

Figure 4 - FF entre surfaces carrées co-axiales, (a) comparaison Analytique (A) vs. Numérique (N) pour H=1m, (b) Abaque adimensionnelle

3.2. DEUX RECTANGLES QUELCONQUES PERPENDICULAIRES



(a) (b)

Figure 5 - FF entre surfaces quelconques perpendiculaires, (a) Définition Géométrique, (b) Comparaison Analytique vs. Numérique pour une configuration.

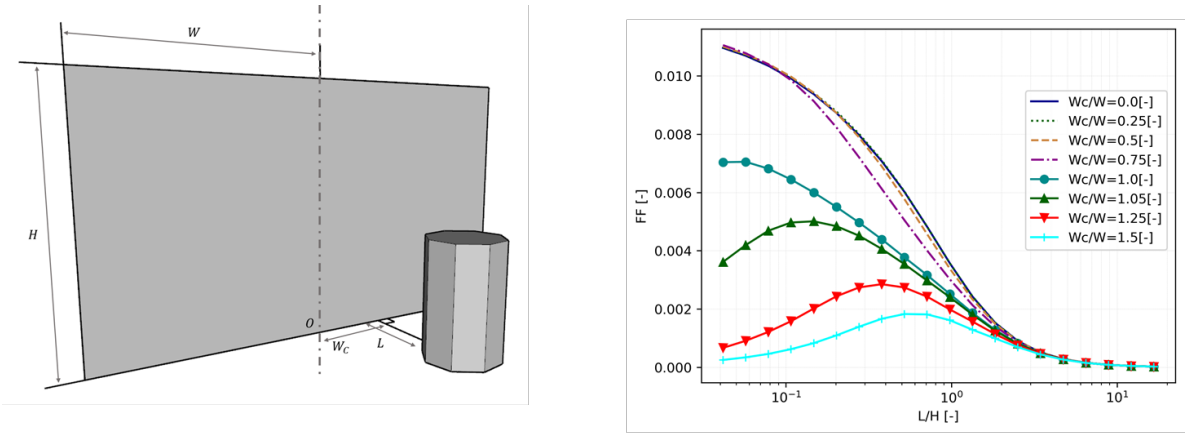
Les erreurs absolues restent « constantes », entre 10^{-4} et 10^{-5}, liées par ordre d'importance au arrondis « géométriques » inhérents aux outils de modélisation et à leur format d'exports, et dans une moindre mesure aux erreurs d'intégration numériques.

4. ABAQUES POUR LE CALCUL DE TEMPERATURE RADIANTE MOYENNE

On présente ci-après des applications numériques sous formes d'abaques entre un cylindre à base octogonale représentant un mannequin humain et des parois, horizontales (i.e. un mur) et vertical (i.e. un plafond). Dans l'ensemble des comparaisons qui suivent, le cylindre a une hauteur $h = 1{,}65$ m et un rayon de $R = 0.23$ m (Vorre 2015). Les FF présentés sont calculés depuis la paroi vers le cylindre. Dans ce cas, on peut utiliser la relation d'additivité des FF $\left(F_{Parois \to Cylindre} = \sum F_{Parois \to Facette}\right)$. En revanche la relation de réciprocité des FF ne s'applique plus avec la surface globale du cylindre.

L'orientation de l'octogone a une influence marginale sur la valeur du calcul de facteur de forme.

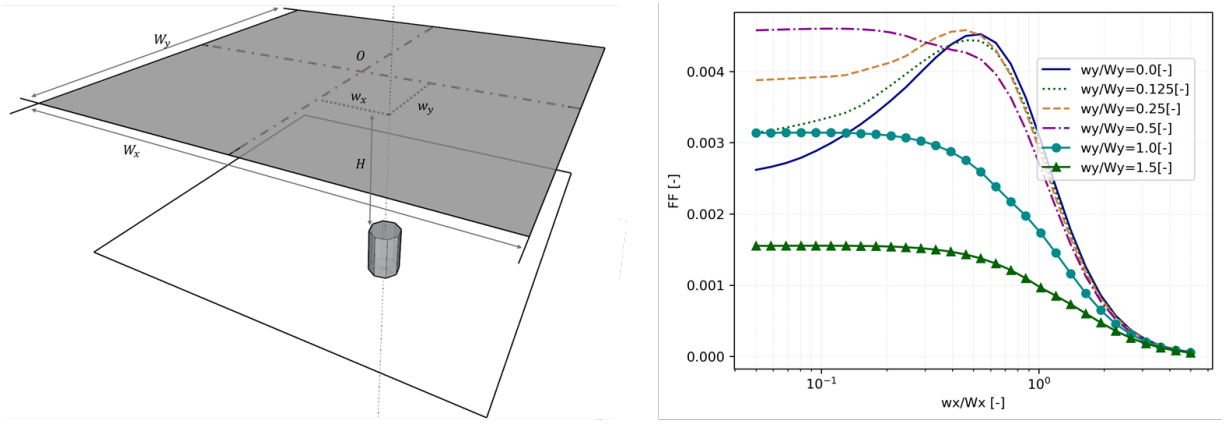
Cas du cylindre *versus* une paroi verticale



(a) (b)

Figure 6 - Abaques Cylindre vs. Mur, H=6m, (a) description géométrique, (b) abaque adimensionnelle

Cas du cylindre *versus* un plafond (calculs effectués pour $H = 1.45$ m)

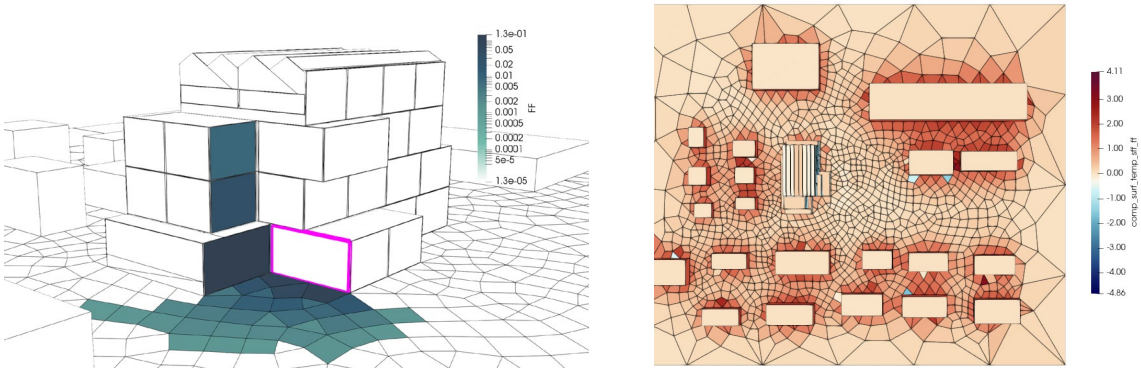


(a) (b)

Figure 7 - Abaques Cylindre vs. Plafond carré, H=1.45m, (a) description géométrique, (b) abaque adimensionnelle

5. EXEMPLE D'APPLICATION A UN CALCUL EN ENVIRONNEMENT URBAIN

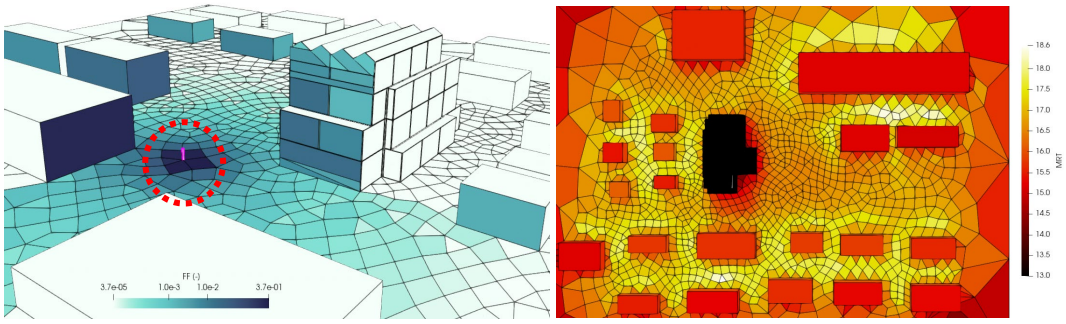
Les facteurs de forme calculés ont été intégrés dans le code de simulation thermique dynamique EnergyPlus appliqué à la simulation des températures de surface extérieure de l'environnement bâti (Walther 2021). Celle-ci a été réalisée avec et sans facteurs de forme des parois environnantes, auquel cas une valeur par défaut est prise (il s'agit du coefficient de rayonnement linéarisé, pondéré par un facteur de forme approché en fonction de l'inclinaison de la paroi, voir le détail p. 87 de (DOE 2020)). La *Figure 8 (a)* illustre le facteur de forme entre une facette de la scène et son environnement. Sur la *Figure 8 (b)*, on observe la différence de température de surface avec et sans FF, qui varie entre -4.9 et +4.1 K et est plus marquée pour les surfaces proches des bâtiments.



(a) *(b)*

Figure 8 : Facteur de forme entre une facette au rez-de-chaussée d'un bâtiment (encadrée en rose) et les facettes proches (a) et écart de température avec et sans prise en compte des facteurs de forme à 12h le 31/7 (b).

Dans un second temps, le calcul de la température radiante est réalisé en post-traitement sur la même scène. Cela a permis de montrer la pertinence de cette approche, avec des variations importantes de MRT, notamment dans les espaces proches des bâtiments (voir *Figure 9 (b)*).



(a) *(b)*

Figure 9 : Facteur de forme entre un individu octogonal et son environnement proche (a) et température radiante moyenne de l'environnement urbain (b)

6. CONCLUSIONS & PERSPECTIVES

Dans ce travail, une méthode de calcul des facteurs de forme particulièrement adaptée aux surfaces polygonales est exposée. Celle-ci a été validée sur des cas analytiques et des abaques donnant le facteur de forme entre un individu cylindrique et différentes configurations de parois ont été produites.

Les travaux à venir visent à produire des abaques complémentaires permettant de traiter plus de cas liés aux études urbaines, notamment sur les facteurs de forme entre un individu et une scène urbaine (sol, parois, ciel). La production automatisée de cartographies de MRT en intérieur est en cours au moment de rédiger ces travaux (voir l'aperçu ci-dessous).

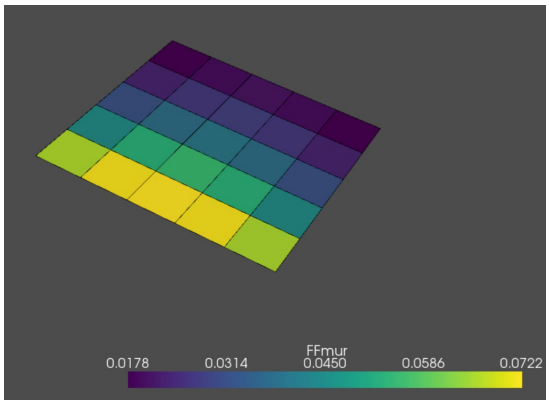


Figure 10 : Travaux en cours – Production automatisée de cartographies de température radiante en intérieur à partir des facteurs de forme paroi-individu sur la zone d'occupation (ici la contribution d'un mur vertical)
i

Le reformatage du code est également prévu afin de publier une librairie Python open-source pour la diffusion plus large de la méthode. Dans ce cadre, la modification de l'individu sera aisée, afin de pouvoir prendre en compte d'autres dimensions (hauteur, diamètre, nombre de facettes) ou types de solides (ovale ou parallélépipède comme dans (Vorre 2015)). Les développements seront disponibles sur https://gitlab.com/arep-dev.

7. BIBLIOGRAPHIE

Alecian, Marc. «La pluridisciplinarité dans la démarche de conception mise à l'épreuve par l'intromission des expertises : la modélisation thermique de l'environnement urbain au service de l'aménagement ?» Mémoire de Master, AREP L'hypercube, ENS Paris Saclay - Ecole d'Urbanisme de la ville de Paris - Ecole des Ponts Paris Tech, Paris, 2021.

Amrit, Ambirajan, et S.P. Venkateshan. «Accurate determination of diffuse view factors between planar surfaces.» *International Journal of Heat and MAss Transfer* 36, n° 8 (1993).

«Outside Surface Heat Balance.» Dans *EnergyPlus Engineering Reference Version 9.4.0*, de DOE. 2020.

EnergyPlus. «EnergyPlus Engineering Reference 9.4.» Chapter 19, 2020.

Luo, Hong and Tan. «Modeling thermal interactions between buildings in an urban context.» *Energies*, 2020.

Mazumder, Sandip, et Mahesh Ravishankar. «General procedure for calculation of diffuse view factors between arbitrary planar polygons.» *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55, n° 23-24 (2012): 7330 - 7335.

Modest, Michael. *Radiative Heat Transfer.* 2e. 2003.

Schmid, Quentin. *Numerical radiative transfer using an immerse volume.* Thèse de doctorat, MINES ParisTech, Paris: PSL Research University, 2016.

Sullivan, Bane, et Alexander Kaszynski. «PyVista : 3D plotting and mesh analysis through a streamlined interface for the Visualisation Toolkit (VTK).» *Journal of Open Source Software* 4, n° 37 (2019): 1450.

Vorre, Jensen, Le Dréau. «Radiation exchange between persons and surfaces for building energy simulations.» *Energy & Buildings*, 2015: 101-121.

Walther, E. et Delmarre, C. et Huet, S. «Simulation of Outdoor Thermal Comfort: A Tweak with EnergyPlus.» *Building Simulation.* Bruges, 2021.